Universitat Autònoma de Barcelona

Departament de Física
Grup de Física Teòrica

Teories Supersimètriques amb Dimensions Extra

Memòria presentada per en Daniel Martí Ortega
com a Treball de Recerca de Tercer Cicle de Doctorat en Física.

Bellaterra, setembre de 2002.

El Dr. Alex Pomarol Clotet, Professor Titular de Física Teòrica la Facultat de Ciències de la Universitat Autònoma de Barcelona, i membre de l'Institut de Física d'Altes Energies,

CERTIFICA: Que la present memòria, que porta per títol "Teories Supersimètriques amb Dimensions Extra", ha estat realitzada sota la seva direcció per en Daniel Martí Ortega i que constitueix el Treball de Recerca de Tercer Cicle de Doctorat en Física d'aquest estudiant.

Bellaterra, setembre del 2002

Alex Pomarol Clotet

Vull agrair en primer lloc a l'Alex Pomarol el seu inestimable ajut i paciència en la realització d'aquest treball.

A tots i cadascun dels companys del Grup de Física Teòrica, per totes les discussions, tertúlies i consells.

A la meva família, amics i amigues pel seu impagable suport i comprensió.

He d'agrair també el suport econòmic proporcionat pel projectes 2001 SGR 00188 del GRC i AEN99-0766 del CICYT.

Índex

Capítol 1

Introducció

1.1 El Model Estàndard

El model de què disposem actualment per a descriure les interaccions fonamentals entre les partícules elementals és l'anomenat Model Estàndard, o *Standard Model* (SM). Es tracta d'un model que descriu les forces electromagnètica, feble i forta, és a dir, totes les forces conegudes a la Natura exceptuant la gravetat, i que ha estat confirmat experimentalment amb una precisió extraordinària en tot el rang d'energies accessible als acceleradors actuals (fins a ~ 100 GeV). L'SM és una teoria quàntica de camps que es basteix sobre dos grans principis de simetria: invariància Poincaré (transformacions de Lorentz + translacions en l'espaitemps) i invariància *gauge* (la dependència espaciotemporal de la fase dels camps carregats sota el grup de gauge és inobservable). Les partícules elementals s'agrupen formant diferents representacions del grup de gauge i s'exigeix que la teoria es mantingui invariant sota una transformació a qualsevol punt de l'espaitemps. Aquest requeriment fixa la forma de les interaccions. En el cas del Model Estàndard el grup de gauge és $\mathrm{SU}(3)_c \times \mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$. El factor $\mathrm{SU}(3)_c$ descriu les interaccions fortes, mentre que el factor $\mathrm{SU}(2)_L \times \mathrm{U}(1)_Y$ correspon a les interaccions electromagnètiques i febles.

La simetria gauge ha d'estar d'alguna manera trencada si volem que el model reprodueixi l'espectre de partícules massives que observem[1]. Per a mantenir la consistència del model cal, a més, que aquest trencament sigui *espontani*, és a dir, que sigui tal que l'acció completa segueixi essent simètrica sota la transformació de gauge tot i que el buit (l'estat de mínima energia) hagi deixat de ser-ho. Es pot provocar un trencament espontani amb la presència d'un camp escalar que transformi com un doblet de $\mathrm{SU}(2)_L$ i que prengui un valor esperat en el buit no nul. Gràcies a aquest camp escalar fonamental, anomenat *bosó de Higgs*, les partícules

[1] La imposició de la simetria gauge sobre el lagrangià de l'SM no permet l'aparició de termes de massa.

poden adquirir massa, que serà proporcional a l'escala de trencament electrofeble. El descobriment del bosó de Higgs és probablement l'única peça important que falta per corroborar el model.

El Model Estàndard és per altra banda una teoria autoconsistent; tot i l'aparició repetida de divergències en els càlculs, aquestes es poden reabsorbir mitjançant una redefinició dels paràmetres del lagrangià, permetent així de fer prediccions físiques com ara seccions eficaces o ritmes de desintegració. El Model Estàndard és una teoria *renormalitzable*.

Malgrat l'èxit, existeix la ferma convicció que l'SM no és un model definitiu. Els físics de partícules veuen l'SM com el límit a baixes energies d'una teoria més fonamental, el coneixement de la qual permetria explicar l'origen de, si no tots, almenys part dels 19 paràmetres independents que té l'SM, així com entendre l'estructura en famílies, la quantificació de la càrrega, la unificació amb la gravetat, etc.

La necessitat d'una teoria més fonamental no obeeix únicament a la voluntat d'eliminar les arbitrarietats del model. El Model Estàndard presenta un problema de naturalitat anomenat *problema de la jerarquia*. Els quarks, leptons i bosons de gauge de l'SM tenen masses físiques proporcionals a l'escala de trencament electrofeble, la qual és, a la vegada, proporcional a la massa del camp escalar responsable del trencament. En general, però, les masses de les partícules escalars, a diferència dels fermions o els bosons de gauge, no estan protegides per cap simetria i reben correccions radiatives proporcionals al *cutoff*[2] de la teoria, que correspon de manera natural a la massa de Planck $m_{\rm Pl} = \sqrt{\hbar c/G_N} \sim 10^{16}$ TeV, en què presumiblement la gravetat s'unifica amb les altres tres interaccions; a energies superiors a la massa de Planck els efectes de gravetat quàntica no es poden negligir i l'SM és un model clarament inadequat. Per tal que les masses de les partícules siguin les observades experimentalment, el camp de Higgs ha de prendre un valor esperat en el buit de l'ordre de 100 GeV. Per tal que això succeeixi és imprescindible cancel·lar les enormes correccions quàntiques que pateix el paràmetre de massa del Higgs fent un ajust molt precís —i, per tant, poc natural— d'aquest paràmetre de la teoria. Convé trobar doncs un mecanisme que expliqui per què la massa del bosó de Higgs és 16 ordres de magnitud inferior a l'escala de Planck. El Model Estàndard no permet entendre aquesta disparitat d'escales.

Per altra banda, hem apuntat abans que el Model Estàndard és necessàriament incomplet perquè no descriu la interacció gravitatòria. Qualsevol intent de casar el Model Estàndard amb la Teoria General de la Relativitat porta inevitablement a una teoria no renormalitzable; la teoria perd aleshores gran part del seu poder predictiu i, en conseqüència, el seu atractiu com a model. ¿Com s'entén aleshores que, tot i no incorporar una de les quatre forces de la Natura, el Model Estàndard descrigui amb una precisió extraordinària els fenòmens que observem als accelera-

[2]límit superior del règim d'energies en què el model és aplicable.

dors? La resposta està relacionada amb la jerarquia que esmentàvem més amunt: l'acoblament gravitatori (la constant de Newton) és negligible enfront dels altres acoblaments sempre que ens moguem a règims d'energia com els que permeten explorar els acceleradors actuals. A energies més altes, però, és d'esperar que la interacció gravitatòria guanyi rellevància i que el Model Estàndard deixi de descriure el món físic amb tanta precisió. Entenem doncs el Model Estàndard com una *teoria efectiva* a baixes energies. Concretament, sabem del cert que l'SM descriu correctament la física de fins aproximadament 100 GeV.

Per ara no sabem a quina escala d'energies l'SM deixa de ser un model vàlid. Naturalment aquesta escala no pot ser més gran que l'escala de Planck, però res no impedeix que se situï tan sols a 1 TeV. Si aquest fos el cas, podríem observar nova física (no descrita per l'SM) als acceleradors que s'estan construint actualment, que permetran explorar la física de fins uns pocs TeV. La nova generació d'acceleradors permetrà simultàniament de provar l'existència del bosó de Higgs, que fins avui ha escapat de tota detecció.

1.2 Més enllà del Model Estàndard

Al llarg dels darrers 30 anys s'han proposat diferents models que ofereixen solucions als problemes esmentats més amunt. Entre aquests models destaquen els models amb *technicolor*, les teories supersimètriques, les teories formulades en espaitemps de més de 4 dimensions i les teories de cordes. Aquest treball es fonamenta en dos d'aquests models, models amb supersimetria i amb dimensions extra.

1.2.1 Supersimetria

Existeix la possibilitat d'estendre les simetries de l'SM transformant l'àlgebra de Poincaré de l'espaitemps a una *superàlgebra*, en la qual, a més dels generadors bosònics habituals, existeixen generadors fermiònics (generadors que anticommuten entre sí). Convé remarcar que aquesta és l'única extensió de simetries possible de l'espaitemps 4-dimensional. Els generadors fermiònics són spinors que transformen bosons en fermions, i viceversa. Des d'un punt de vista físic, la presència d'operadors fermiònics en la superàlgebra es tradueix en una simetria entre bosons i fermions, com a resultat de la qual existeix un company escalar degenerat en massa per a cada quark i leptó coneguts —els "squarks" i "sleptons", respectivament— així com un company fermiònic, també degenerat en massa, per a cada bosó de gauge —els "gauginos"—. La imposició de supersimetria restringeix severament una teoria i per tant redueix en gran part l'arbitrarietat en les possibles interaccions.

No hi ha actualment cap evidència experimental de l'existència de supersimetria a la Natura: fins avui no s'ha trobat cap dels parents supersimètrics que hauria de tenir cadascuna de les partícules elementals que coneixem. Tot i així, existeixen motius fonamentats per creure en un món supersimètric. Un d'ells és la unificació de les tres constants d'acoblament, amb un 1% de precisió, que es dóna en el Model Estàndard Supersimètric Mínim (MSSM), l'extensió supersimètrica més simple de l'SM. En l'SM sense supersimetria la unificació de les constants és bastant més grollera. Un altre motiu per creure en supersimetria és l'estreta relació que manté amb les teories de cordes, per ara les úniques teories fonamentals que incorporen la gravetat de manera consistent i en conseqüència les úniques teories candidates a formar part d'una hipotètica teoria definitiva del món microscòpic. Aquestes teories necessiten la incorporació de supersimetria per tal de suprimir els taquions de l'espectre així com per fer aparèixer fermions en la teoria. Les teories de cordes amb supersimetria reben el nom de teories de supercordes.

Les teories supersimètriques ofereixen a més un camí per a solucionar el problema de la jerarquia. Encara que no expliquen l'enorme diferència entre l'escala de Planck i l'escala electrofeble sí que aconsegueixen estabilitzar la massa del bosó de Higgs enfront de les correccions radiatives. Si imposem supersimetria, el bosó de Higgs forma un parell degenerat amb un fermió, l'anomenat *Higgsino*, el qual està protegit de correccions radiatives severes gràcies a la simetria quiral; la imposició de supersimetria protegeix automàticament la massa del company bosònic del *Higgsino*. A nivell calculacional, l'absència de divergències quadràtiques es deu a la cancel·lació entre les divergències provocades pels bosons i les causades pels seus companys fermiònics.

Si la supersimetria és present a la Natura, no pot ser una simetria exacta, i ha d'estar trencada. És important que aquest trencament de supersimetria no esgavelli de nou la cancel·lació entre divergències quadràtiques, ja que deixaríem de tenir una solució al problema de la jerarquia. És imprescindible per tant tenir només aquells trencaments, anomenats suaus o *soft*, que no generen divergències. El trencament espontani de supersimetria constitueix un cas particular de trencament *soft*. En considerar només trencaments *soft* els termes de massa únicament renormalitzen multiplicativament, i són proporcionals al quadrat de l'escala de trencament de supersimetria.

La naturalesa d'aquestes divergències ens indica que el trencament de supersimetria, a part de ser *soft*, s'ha de produir a una escala d'energies no massa diferent de l'escala electrofeble, ja que en cas contrari la massa del Higgs rebria correccions massa grans en comparació a l'escala de trencament electrofeble i ens trobaríem novament davant del problema de la jerarquia. Per altra banda, els tests de precisió de l'SM imposen una cota inferior a la massa de les partícules supersimètriques i per tant a l'escala de trencament de supersimetria.

El problema que es planteja aleshores és trobar un mecanisme de trencament realista des del punt de vista fenomenològic. Per ara no s'ha trobat cap model on el trencament espontani de supersimetria aparegui només com a conseqüència de les interaccions entre les partícules que integren el MSSM. És per aquest motiu que tradicionalment s'ha intentat trencar supersimetria fent ús de sectors de matèria *ocults*, neutres respecte el grup de gauge del MSSM, en els quals es produeix el trencament. En aquest tipus de models, el trencament es transmet des dels sectors ocults fins al sector visible del MSSM mitjançant interaccions gauge o de gravetat.

L'aparició de models amb dimensions extra ofereix nous mecanismes de trencament de supersimetria.

1.2.2 Dimensions Extra

La vella idea de Kaluza i de Klein que el nostre espai pot tenir més de tres dimensions espacials ha experimentat una considerable revifalla aquests darrers anys, motivada en gran part perquè l'existència de dimensions extra és inherent a les teories de supercordes. Paral·lelament al desenvolupament de les teories de supercordes, han aparegut nombrosos models fenomenològics que permeten estudiar com poden manifestar-se aquestes dimensions addicionals i com aquestes poden ajudar a resoldre part dels problemes de l'actual teoria de partícules (problemes de la jerarquia i de la constant cosmològica, etc.).

Les dimensions addicionals compactes poden ser comprovades experimentalment. Un observador (3+1)-dimensional veurà les dimensions addicionals en forma d'excitacions de *modes de Kaluza-Klein* per als tots aquells estats que viuen en les dimensions extra. Els modes de Kaluza-Klein tenen masses en unitats discretes de la inversa de l'escala de compactificació i els seus valors precisos depenen de la topologia de l'espaitemps multidimensional. No s'ha observat una ordenació d'aquest estil en l'espectre de partícules conegudes, cosa que ens indica que, o bé no hi ha dimensions extra a la Natura, o bé la matèria que estem observant pertany al sector dels modes no massius de la teoria (els anomenats *modes zero* formats per tots aquells modes amb moment en la direcció de la dimensió extra nul). En aquest darrer cas, la resta de modes són prou pesats com per no poder esser observats als acceleradors actuals.

Fins fa relativament poc temps l'interès en teories amb dimensions extra se centrava en teories de Kaluza-Klein amb les dimensions addicionals (també anomenades internes o "ocultes") compactes i homogènies. La compacitat de les dimensions ocultes assegura que l'espaitemps mostra tan sols 4 dimensions a distàncies majors a l'escala de compactificació. En aquests models l'escala de compactificació era de l'ordre de l'escala de Planck i, per tant, calia renunciar a comprovar experimentalment l'existència de dimensions ocultes.

Recentment l'interès s'ha desplaçat cap als anomenats escenaris de brana de món, en els quals la matèria convencional viu confinada a una hipersuperfície de $3+1$ dimensions, anomenada *brana* o *paret*, que es troba immersa en un espaitemps de dimensió més gran, al qual ens referim com a *bulk*.

En aquest tipus de teories, el problema de la jerarquia es pot reformular des d'una perspectiva purament geomètrica [1, 2, 3]. Suposem que vivim en una paret, 4-dimensional, immersa en un espaitemps amb d dimensions espacials addicionals, el *bulk*. En aquest context, l'escala de Planck 4-dimensional que observem no és fonamental sinó que és una escala derivada de la longitud fonamental de l'espaitemps $(4+d)$-dimensional, caracteritzada per la inversa d'una certa escala M [3]. Si només la gravetat es pot propagar a través de d'aquestes dimensions addicionals, que suposarem planes per simplificar, i la longitud característica de les dimensions extra és $L_{\rm xtra}$, es comprova fàcilment que l'escala de Planck derivada que s'observa a la paret és $M_{\rm Pl} \sim M(ML_{\rm xtra})^{d/2}$. Si admetem que $L_{\rm xtra}$ és molt gran en relació a la longitud fonamental M^{-1} tenim aleshores $M_{\rm Pl} \gg M$. El problema de la jerarquia gauge es reformula així en termes geomètrics: en lloc d'entendre per què l'escala electrofeble és 16 ordres de magnitud inferior a l'escala de Planck, el problema és ara explicar per què la grandària de les dimensions extra $L_{\rm xtra}$ és molt més gran que la grandària fonamental de la teoria M^{-1}. Si bé aquest escenari no explica la jerarquia d'escales, sí que permet tenir una escala fonamental tan baixa com el TeV, fet que obriria la possibilitat d'observar signatures de la teoria $(4+d)$-dimensional subjacent en els acceleradors de partícules de pròxima generació.

Amb l'objectiu de resoldre el problema de la jerarquia, Randall i Sundrum van presentar un model [4] en què la jerarquia es genera com a conseqüència de la curvatura d'un cert espaitemps 5-dimensional. La novetat d'aquest model és que, a diferència del model anterior, la dimensió extra no ha de ser molt més gran que l'escala fonamental. El model es basa en un espaitemps de cinc dimensions amb constant cosmològica negativa en el qual hi ha immerses dues parets (3+1)-dimensionals (v. figura 1.1) amb les constants cosmològiques 4-dimensionals adients per tal que les equacions d'Einstein tinguin com a solució la mètrica

$$\mathrm{d}s^2 = G_{MN}\,\mathrm{d}x^M \mathrm{d}x^N = e^{-2Rk|y|}\,\eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + R^2\mathrm{d}y^2\,,$$

on k és la inversa de radi de curvatura de l'espai i R i y són la longitud i la coordenada de la dimensió extra respectivament. Aquesta solució respecta la invariància Poincaré de 4 dimensions de les parets i de qualsevol secció del *bulk* paral·lela a elles. L'escala física d'energies a cadascuna d'aquestes seccions ve determinada pel factor d'escala $\exp(-2Rk|y|)$ de la mètrica. El *bulk* és màximalment simètric i amb curvatura negativa (l'espai anti-de Sitter), i està limitat per les dues parets; la situada a $y=0$ té una energia per unitat de volum 3-dimensional positiva i relacionada amb la constant cosmològica del *bulk*, mentre que l'altra té la exactament la mateixa tensió però de signe oposat.

Suposem ara que el nostre món és a l'anomenada paret del TeV, situada a $y=\pi$. Gràcies a la naturalesa de la mètrica, les masses físiques vénen determinades pels paràmetres de massa de la teoria i pel *warp factor* $e^{-2Rk\pi}$: qualsevol paràmetre de massa m_0 a la paret del TeV en la teoria multidimensional fonamental correspon a una massa física donada per $m = m_0 e^{-Rk\pi}$. Aquest factor permet generar una

[3] L'escala M és fonamental en el sentit que és l'escala que apareix a l'acció gravitatòria de l'espaitemps complet: $S = -(16\pi G_{(D)})^{-1}\int \mathrm{d}^D X\,\sqrt{g^{(D)}}R^{(D)}$, on $G^{(D)} = M^{2-D}$ és la constant de Newton de $D = 4+d$ dimensions i $\mathrm{d}^D X = \mathrm{d}^4 x\,\mathrm{d}^d z$.

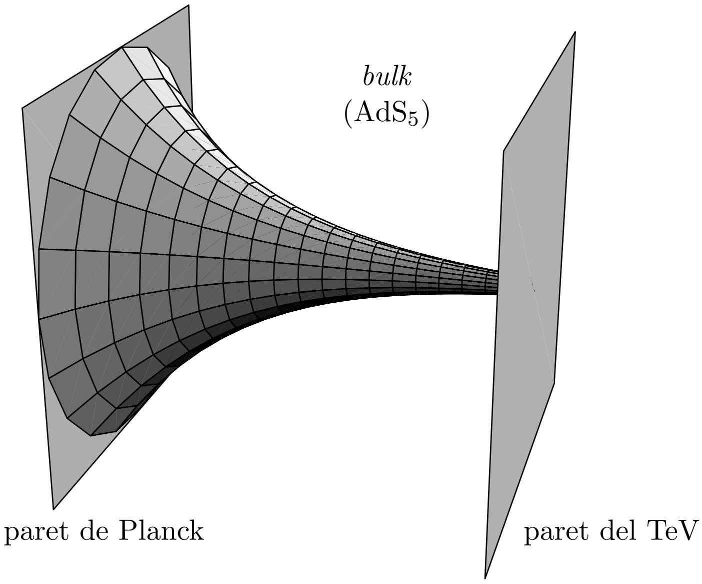

Figura 1.1: El model de Randall-Sundrum consisteix una secció d'espaitemps 5-dimensional de tipus anti-de Sitter (AdS), limitada per dues parets o branes separades per una distància física πR. Amb una configuració adient de les tensions a les parets respecte la constant cosmològica al *bulk*, la solució de les equacions d'Einstein és una mètrica que conté un factor exponencial (*warp factor*) que depèn de la coordenada y de la dimensió extra. La mètrica preserva la invariància Poincaré en les direccions x^μ.

jerarquia enorme sense necessitat de tenir un radi molt gran[4], a diferència de l'escenari anterior. No obstant això, les interaccions gravitatòries de la matèria que resideix a la paret del TeV són febles. L'escala de Planck 4-dimensional ve donada per $M_{\rm Pl}^2 = M^3(1 - e^{-2kR\pi})/k$, de manera que $M_{\rm Pl}$ depèn molt feblement de R en el límit en què $kR \gtrsim 1$ i és de l'ordre de l'escala fonamental de la teoria.

1.3 Motivació i presentació

La supersimetria i la presència de dimensions extra són ingredients indispensables en qualsevol teoria de cordes realista. El coneixement d'aquesta teoria fonamental, però, no és en absolut suficient per establir la connexió amb la física de l'SM. Si bé podem esperar que l'extensió supersimètrica mínima de l'SM és la teoria efectiva a baixes energies d'una determinada teoria fonamental, cal comprendre el mecanisme pel qual la supersimetria ha estat trencada. En aquest context, és molt suggerent la possibilitat que l'escala de compactificació de les dimensions extra i la de trencament de supersimetria tinguin un mateix origen dinàmic. Per altra banda, la unió de supersimetria i dimensions extra podria explicar l'origen del trencament de simetria electrofeble.

Aquest són motius suficients per a explorar diferents escenaris que incorporen simultàniament supersimetria i dimensions extra, des d'un punt de vista purament fenomenològic —encara que sense perdre de vista que aquests models poden aparèixer com a teories efectives d'una certa teoria fonamental multidimensional.

En aquest treball presentem una formalisme útil, basat en l'ús de supercamps $N = 1$, per a treballar en aquest tipus de models. Utilitzarem aquest formalisme per estudiar possibles mecanismes de trencament de supersimetria i derivar-ne les implicacions fenomenològiques més rellevants. En el cas en què la dimensió extra és corbada, els resultats obtinguts es poden interpretar des d'un punt de vista 4-dimensional gràcies a la correspondència entre AdS_5 i teories conformes fortament acoblades en 4-dimensions.

El treball està organitzat de la següent manera. Al capítol 2 descrivim breument les teories supersimètriques en 5 dimensions, així com els mecanismes gràcies als quals podem obtenir una teoria realista. Al capítol 3 presentem la formulació en supercamps $N = 1$ de teories gauge supersimètriques, tant per escenaris amb una dimensió extra plana com en escenaris en què la dimensió addicional està corbada. En aquest mateix capítol estudiem el trencament de supersimetria induït per l'adquisició d'un valor esperat per al terme F del radió. Tot seguit exposem les conclusions d'aquest treball. L'apèndix A inclou un resum de la notació i convenis utilitzats. L'apèndix B presenta una breu introducció al formalisme de supercamps $N = 1$, mentre que a l'apèndix C es mostra explícitament la descomposició en

[4]Fent que $50R^{-1} \sim k$ la raó entre la massa de Planck efectiva a $y = 0$ i la de $y = \pi$ és tan gran com entre $M_{\rm Pl}$ i el TeV, és a dir, de 16 ordres de magnitud.

components de l'acció 5-dimensional del sector gauge pel cas abelià i es comprova en detall la invariància sota transformacions de gauge no abelianes.

Capítol 2

Dimensions Extra i Supersimetria

2.1 Supersimetria en cinc dimensions

Abans de discutir les teories supersimètriques en 5 dimensions, hem d'entendre les diferències entre la supersimetria 4-dimensional i la 5-dimensional. La representació fermiònica mínima del grup de Lorentz 5-dimensional $SO(4,1)$ és un spinor de 4 components. Aquest spinor es descomposa sota el grup de Lorentz 4-dimensional $SO(3,1)$, com dos spinors de Weyl de dues components. En aquest sentit, podem pensar que la supersimetria en 5 dimensions és equivalent a la supersimetria estesa $N = 2$ de 4 dimensions, generada per dos spinors de Weyl de dues components.

En supersimetria 5-dimensional les representacions mínimes de l'àlgebra supersimètrica tenen més components que en la supersimetria de 4 dimensions. Així, el contingut de dos supercamps quirals en 4 dimensions, Φ i Φ^c, constitueix un multiplet de supersimetria en 5 dimensions, anomenat *hipermultiplet* (v. figura 2.1). Des d'un punt de vista 4-dimensional, a més, aquests supercamps són vectorials sota la simetria gauge, és a dir, donat l'hipermultiplet (Φ, Φ^c), si Φ transforma sota el grup de gauge $SU(N)$ com la representació $\mathbf{N}$, aleshores Φ^c transforma com la conjugada $\overline{\mathbf{N}}$. El caràcter vectorial de la teoria (cada Φ ve acompanyat pel seu Φ^c) és conseqüència de la invariància Lorentz 5-dimensional subjacent.

Anàlogament, el multiplet vectorial en 5 dimensions ja no consta només d'un vector i d'un fermió (les components del multiplet vectorial en 4 dimensions), sinó que inclou a més un supercamp quiral χ que conté una escalar complex $\Sigma + \mathrm{i}A_5$ i un spinor de Weyl λ^c (v. figura 2.2). El supercamp quiral transforma en la representació adjunta del grup de gauge.

Ara bé, la matèria que observem és quiral[1] i, a més a més, no veiem els camps

[1] Les interaccions febles violen paritat, ja que tan sols els fermions esquerre (*left-handed*) senten la força feble. Qualsevol teoria que pretengui descriure la Natura ha de ser forçosament quiral, és

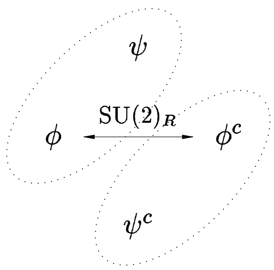

Figura 2.1: L'hipermultiplet (supermultiplet de matèria de 5 dimensions). La matèria en una teoria supersimètrica en 5 dimensions apareix en forma d'hipermultiplet. Des d'un punt de vista 4-dimensional l'hipermultiplet conté dos multiplets quirals $N = 1$, $\Phi = (\phi, \psi)$ i $\Phi^c = (\phi^c, \psi^c)$, aquí agrupats en línies de punts. Els camps escalars ϕ i ϕ^c de l'hipermultiplet formen un doblet sota $\mathrm{SU}(2)_R$ de la supersimetria en 5 dimensions. Els camps fermiònics són singlets sota aquesta simetria.

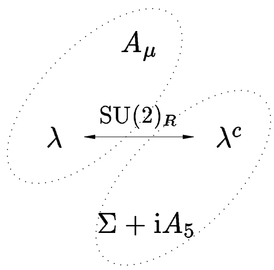

Figura 2.2: El supermultiplet vectorial de 5 dimensions. El sector gauge en una teoria supersimètrica en 5 dimensions es presenta en forma de multiplet vectorial 5D, el qual conté, a més del multiplet vectorial de 4 dimensions $V = (A_\mu, \lambda)$, un multiplet quiral $\chi = (\Sigma + \mathrm{i}A_5, \lambda^c)$. Els gauginos λ i λ^c són doblets sota $\mathrm{SU}(2)_R$, mentre que tant $\Sigma + \mathrm{i}A_5$ com A_μ en són singlets. Tots els camps components del supermultiplet vectorial transformen en la representació adjunta del grup de gauge.

quirals en la representació adjunta i sense massa (els camps components de χ) que prediu la supersimetria 5-dimensional. Cal trobar doncs un mecanisme que elimini del sector de modes zero (que han de constituir l'SM) tots aquells estats no desitjats.

2.2 Projecció en un *orbifold* $S^1/\mathbb{Z}_2$

Per tal de fer un model realista a partir d'una teoria supersimètrica 5-dimensional convé eliminar els estats que sobren fent una compactificació sobre un *orbifold* $S^1/\mathbb{Z}_2$. L'orbifold es construeix a partir d'un cercle S^1, parametritzat per la coordenada $y \in [0, 2\pi]$, i fent la identificació entre els punts y i $-y$. (v. figura 2.3). Podem pensar en l'orbifold com una varietat amb dues vores als punts fixos, situats a $y = 0$ i $y = \pi$.

La compactificació de la teoria 5-dimensional en un *orbifold* $S^1/\mathbb{Z}_2$ té una implicació important. Sota la transformació $y \leftrightarrow -y$ els camps 5-dimensionals tenen paritats ben definides: $\Phi_\pm(-y) = \pm\Phi_\pm(y)$, és a dir, els camps 5-dimensionals són o bé parells o bé imparells sota la transformació de paritat. Les assignacions de paritat vénen determinades (llevat d'un signe) per la invariància del lagrangià 5-dimensional sota la transformació de paritat. Podem col·locar parets en els punts

a dir, ha de tractar diferentment els fermions *left-handed* dels *right-handed*. En l'SM la quiralitat es manifesta en les diferents representacions per als fermions *left-handed* (doblets de $\mathrm{SU}(2)_L$) i els fermions *right-handed* (singlets sota el mateix grup).

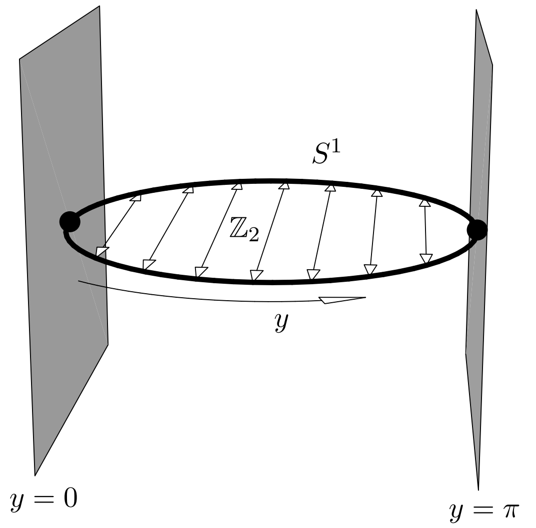

Figura 2.3: L'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$. La paritat $\mathbb{Z}_2$ identifica cada punt de coordenada y en S^1 amb el de coordenada $-y$. Els punts $y = 0$ i $y = \pi$ són punts fixos sota la transformació $\mathbb{Z}_2$.

fixos de l'orbifold, de manera que les interaccions en aquestes parets únicament han de preservar simetria Lorentz 4-dimensional i supersimetria $N = 1$. El desenvolupament en sèries de Fourier dels camps 5-dimensionals es modifica en compactificar en l'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$

$$\phi(x,y) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{iny/R}\phi^{(n)}(x) \xrightarrow{S^1/\mathbb{Z}_2 \text{ comp.}} \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} \cos\big(ny/R\big)\phi_+^{(n)}(x)\,, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \sin\big(ny/R\big)\phi_-^{(n)}(x)\,, \end{cases} \tag{2.1}$$

on l'espectre es desdobla en modes de paritat positiva i negativa sota $\mathbb{Z}_2$. Qualsevol estat amb paritat negativa és automàticament eliminat del sector no massiu ($n = 0$). Si assignem paritat negativa als supercamps quirals Φ^c i χ estarem reduint l'estructura del sector no massiu a una teoria supersimètrica $N = 1$ 4-dimensional formada pels supercamps Φ i V:

$$\text{SUSY } 5D \xrightarrow{S^1/\mathbb{Z}_2 \text{ comp.}} \text{SUSY } N = 1\,. \tag{2.2}$$

Després de compactificar en l'orbifold, l'espectre de partícules sense massa esdevé quiral.

2.3 Trencament de supersimetria. El mecanisme de Scherk-Schwarz

Tot i tenir un espectre no massiu quiral, encara resta la supersimetria $N = 1$ 4-dimensional i per tant tenim encara partícules supersimètriques en l'espectre no massiu. En models en què la dimensió extra és un orbifold o un torus, la supersimetria —de fet, una simetria qualsevol— es pot trencar amb el mecanisme de Scherk-Schwarz [5]. Aquest consisteix a imposar als camps 5-dimensionals una condició periòdica no trivial (un *twist*, a la literatura) en fer una translació en la cinquena dimensió:

$$\phi(x^\mu, y + 2\pi) = e^{\mathrm{i}2\pi qT}\,\phi(x^\mu, y)\,, \tag{2.3}$$

on T és un generador d'una simetria global de la teoria 5-dimensional. La dependència en y dels camps ja no pot ser la trivial (2.1), sinó que ha de ser del tipus

$$\phi(x^\mu, y) = e^{\mathrm{i}qTy}\,\widetilde{\phi}(x^\mu, y)\,, \tag{2.4}$$

on $\widetilde{\phi}(x^\mu, y)$ és un camp periòdic en y: $\widetilde{\phi}(x^\mu, y+2\pi) = \widetilde{\phi}(x^\mu, y)$. La simetria generada per T és aleshores trencada a nivell arbre pel terme cinètic.

Per trencar supersimetria aplicarem el mecanisme de Scherk-Schwarz (SS) al grup d'automorfismes $\mathrm{SU}(2)_R$ present en una teoria supersimètrica de 5 dimensions. En l'hipermultiplet els escalars estan carregats sota $\mathrm{SU}(2)_R$, però no així els fermions. Si imposem la condició no trivial (2.3) sobre els camps escalars de l'hipermultiplet, essent T els generadors de la simetria $\mathrm{SU}(2)_R$, trencarem la degeneració entre fermions i bosons en dotar aquests darrers d'una massa *soft*. En el cas del supermultiplet vectorial de 5 dimensions, són els gauginos els camps que estan carregats sota $\mathrm{SU}(2)_R$ i són per tant els que reben massa, deixant només els bosons A_μ en l'espectre no massiu.

El procediment seguit per a obtenir un sector no massiu quiral i sense companys supersimètrics es mostra a la figura 2.4.

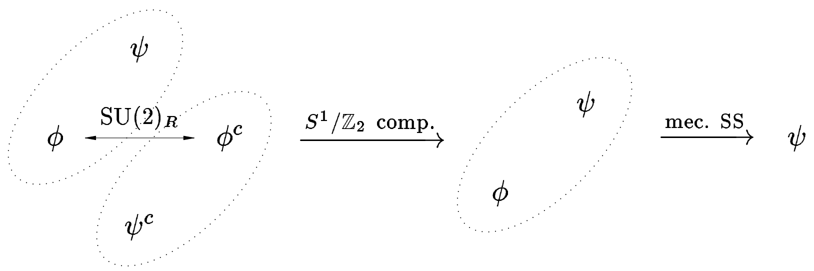

Figura 2.4: Per tal de reproduir l'espectre de partícules de l'SM a partir d'una teoria supersimètrica 5-dimensional cal que l'espectre de modes zero sigui quiral, cosa que s'aconsegueix mitjançant la compactificació en un orbifold. Aquesta projecció deixa una supersimetria $N = 1$ romanent en l'espectre, que convé eliminar. Aquesta supersimetria $N = 1$ es pot trencar mitjançant el mecanisme de Scherk-Schwarz. En aquesta figura el supermultiplet inicial és l'hipermultiplet; per al multiplet vectorial el procediment és idèntic.

Capítol 3

Teories supersimètriques amb dimensions extra en formulació de supercamps.

En l'estudi de teories supersimètriques resulta molt útil disposar del formalisme de supercamps [6], en el qual la invariància sota transformacions supersimètriques és manifesta i on resulta especialment senzilla la formulació de teoremes de no-renormalització [7], que permeten determinar quines són les correccions radiatives que desapareixen en considerar supersimetria.

El formalisme de supercamps $N = 1$ s'ha vingut utilitzant extensament en teories amb quatre dimensions. En teories amb dimensions extra, en canvi, s'ha treballat exclusivament en termes dels camps components separadament, ja que no existeix una formulació general en supercamps multidimensionals per a aquestes teories. El primer intent de formulació d'accions supersimètriques en supercamps es va fer en una teoria de 10 dimensions [8], basant-se en l'ús de supercamps $N = 1$ 4-dimensionals, és a dir, els supercamps habituals definits en el superespai 4-dimensional. La mateixa idea ha permès recentment d'escriure les accions en supercamps de teories amb dimensions compreses entre 5 i 10 [9]. La utilització en aquests contextos de supercamps $N = 1$ 4-dimensionals és sempre possible, atès que les teories supersimètriques amb dimensions extra contenen la supersimetria de 4 dimensions. Encara que en aquest formalisme només la supersimetria $N = 1$ és manifesta (i, en conseqüència, no és visible la simetria $\mathrm{SU}(2)_R$, sinó només $\mathrm{U}(1)$) la utilització de supercamps 4-dimensionals representa una simplificació considerable respecte l'ús dels camps components separadament. L'obtenció de l'acció efectiva i dels acoblaments entre el *bulk* i les parets resulta particularment simple en aquest formalisme, el qual permet a més derivar teoremes de no-renormalització de manera senzilla.

En aquest treball ens centrarem en l'acció d'una teoria 5-dimensional supersimètrica, amb la dimensió extra compacta. Com a novetat respecte les formulacions prèvies, incorporem d'un nou supercamp T que inclou el *radió*. El radió és un camp escalar 4-dimensional que parametritza les fluctuacions en el "volum" —longitud en el nostre cas— de la dimensió extra. El valor esperat en el buit del camp radió determina la grandària de la dimensió extra. La utilització del supercamp T del radió permet escriure l'acció supersimètrica de camps que viuen tant en un espai pla com en un de corbat, tal com veurem més endavant. Concretament, considerarem una teoria amb supermultiplets vectorials 5-dimensionals (el sector gauge) i hipermultiplets (el sector de matèria) carregats en un espai on la dimensió extra plana és el cercle S^1 o l'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ i en un altre espai, amb la dimensió extra corbada, que correspondrà a un escenari de tipus Randall-Sundrum.

Com a aplicació, utilitzarem la formulació en supercamps per a estudiar el trencament de supersimetria induït per l'adquisició d'un valor esperat en el buit per al terme auxiliar F del radió. Per a una dimensió extra plana, veurem que aquest mecanisme de trencament de supersimetria és equivalent a un trencament de tipus Scherk-Schwarz (SS). En particular, obtindrem l'espectre de masses dels models [10, 11, 12] i [13], en els quals la supersimetria es trenca amb el mecanisme de SS. La formulació presentada es pot interpretar per tant com una descripció en supercamps del mecanisme de Scherk-Schwarz i ens permet provar que el mecanisme de SS de trencament de supersimetria és espontani.

El supermultiplet de gravetat de 5 dimensions inclou la pèntada[1] e_M^A, el doblet $\mathrm{SU}(2)_R$ de gravitinos ψ_M^a i el gravifotó B_M. En aquest treball només considerarem part d'aquest supermultiplet, la que correspon al supermultiplet quiral (4-dimensional) T del radió. Donat que no incorporem tot el sector gravitatori 5-dimensional, l'acció que trobarem més avall s'ha d'interpretar com la d'una teoria supersimètrica en un cert fons (*background*) gravitatori no trivial.

3.1 Acció en supercamps en un espaitemps pla

Considerem una teoria que viu en cinc dimensions, on la dimensió addicional ve compactificada en un cercle, S^1. L'espaitemps és per tant la varietat $\mathcal{M}^4 \times S^1$, on $\mathcal{M}^4$ és l'espai de Minkowski habitual. La mètrica ve donada per

$$\mathrm{d}s^2 = \eta_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + R^2 \mathrm{d}y^2 \,, \tag{3.1}$$

on R és el radi de la dimensió extra, la coordenada (adimensional) de la qual denotem per y, que pren valors compresos entre 0 i 2π. El radi R ve fixat pel valor esperat en el buit del radió: $\langle R(x)\rangle = R$. La mètrica 4-dimensional utilitzada és $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$.

[1]Versió 5-dimensional de la tètrada. Altres noms en lloc de pèntada utilitzats a la literatura són *fünfbein* o, simplement, *vierbein*. La definició és anàloga a la versió 4-dimensional; els índexs $A, B\ldots$ són "plans" i els índexs $M, N\ldots$ són "corbats" de manera que $G_{MN} = e_M^A e_N^B\, \eta_{AB}$.

El nostre objectiu és obtenir l'acció de la teoria 5-dimensional en termes de supercamps que viuen en el fons gravitatori descrit per la mètrica (3.1). Per fer-ho cal que el radió $R(x)$ formi part d'un cert supercamp juntament amb altres camps, amb els quals constitueix un multiplet supersimètric $N = 1$. Cal per tant *promoure* R a un supercamp, el qual denotarem per T.

Aquest T és un supercamp quiral $N = 1$ usual, que juntament amb R conté [14] la cinquena component del gravifotó B_5, la cinquena component del gravitino *right-handed*, Ψ^5_R, i un camp auxiliar complex F_T. Fent servir la notació detallada a l'apèndix B, la descomposició en camps components del supercamp T seria

$$T = R + \mathrm{i}B_5 + \theta\Psi^5_R + \theta^2 F_T \,. \tag{3.2}$$

3.1.1 Supermultiplet vectorial

El supermultiplet vectorial de cinc dimensions i $N = 1$ conté, en la formulació *off-shell*[2], un vector de 5 dimensions A_M, dos fermions de Weyl λ_1 i λ_2, un camp escalar real Σ, i dos camps auxiliars D i F_χ, real i complex respectivament.

Sota la supersimetria $N = 1$ de quatre dimensions, tots aquests camps s'agrupen en un supermultiplet vectorial V i un de quiral χ

$$V = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta}A_\mu - \mathrm{i}\bar{\theta}^2\theta\lambda_1 + \mathrm{i}\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}_1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta^2 D \,, \tag{3.3}$$

$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma + \mathrm{i}A_5) + \sqrt{2}\theta\lambda_2 + \theta^2 F_\chi \,, \tag{3.4}$$

on V ve donat en el gauge de Wess-Zumino (v. apèndix B).

Començarem pel cas més senzill, el d'una teoria gauge abeliana. Els supercamps transformen sota una transformació de gauge com

$$V \to V + \Lambda + \Lambda^\dagger \,, \tag{3.5}$$

$$\chi \to \chi + \sqrt{2}\partial_5\Lambda \,, \tag{3.6}$$

on Λ és un supercamp quiral arbitrari.

L'acció que descriu una teoria invariant gauge en un fons descrit per (3.1) ve donada per

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \left\{ \frac{1}{4g_5^2} \int \mathrm{d}^2\theta \; TW^\alpha W_\alpha + \text{ h.c.} \right.$$
$$\left. + \frac{2}{g_5^2} \int \mathrm{d}^4\theta \, \frac{1}{(T+T^\dagger)} \Big(\partial_5 V - \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + \chi^\dagger) \Big)^2 \right\} . \tag{3.7}$$

[2] Podem realitzar l'àlgebra supersimètrica sense necessitat de fer servir les equacions del moviment dels camps components, amb la condició d'introduir uns *camps auxiliars* no dinàmics.

Es pot comprovar fàcilment que aquesta acció en supercamps dóna lloc l'acció en components correcta. Només cal fer les integrals sobre les coordenades θ del superespai, tenint en compte que el valor esperat del supercamp T és $\langle T \rangle = R$, i eliminar els camps auxiliars —que no són dinàmics— a través de les seves equacions del moviment, que tenen la forma següent:

$$F_\chi = 0\,, \qquad\qquad D = -\frac{\partial_5 \Sigma}{R^2}\,. \tag{3.8}$$

Després de reescalar els camps del multiplet vectorial segons la transformació $\Sigma \to R\Sigma$, $\lambda_2 \to -\mathrm{i}R\lambda_2$ obtenim finalment

$$S_5 = \frac{1}{g_5^2}\int \mathrm{d}^5x\,\sqrt{-g}\left\{-\frac{1}{2}\partial_M\Sigma\partial^M\Sigma - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\boldsymbol{\lambda}}_i\gamma^M\partial_M\boldsymbol{\lambda}_i\right\}, \tag{3.9}$$

on hem definit els spinors de Majorana simplèctics $[\boldsymbol{\lambda}_i]^T \equiv (\lambda_i, \epsilon_{ij}\bar{\lambda}_j)$ per fer manifesta la invariància de l'acció (3.9) sota el grup d'automorfismes $\mathrm{SU}(2)_R$ [15, 16] que té la teoria supersimètrica $N = 1$ de 5 dimensions.

En el cas no abelià, trobar l'acció requereix una mica més d'esforç. El segon terme de l'expressió. (3.7) és ara substituït per

$$\frac{2}{g_5^2}\int \mathrm{d}^4\theta\,\frac{1}{(T+T^\dagger)}\,\mathrm{Tr}\Big[\{e^{V/2}, \partial_5 e^{-V/2}\} + \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{V/2}\chi^\dagger e^{-V/2} + e^{-V/2}\chi e^{V/2})\Big]^2, \tag{3.10}$$

on $\{A, B\} = AB + BA$. L'expressió (3.10) és invariant sota les transformacions de gauge

$$\chi \to U^{-1}(\chi - \sqrt{2}\partial_5)U\,, \qquad\qquad e^V \to U^{-1}e^V U^{-1\,\dagger}\,, \tag{3.11}$$

$$\chi^\dagger \to U^\dagger(\chi^\dagger + \sqrt{2}\partial_5)U^{-1\,\dagger}\,, \qquad\qquad e^{-V} \to U^\dagger e^{-V}U\,, \tag{3.12}$$

on $U = e^{-\Lambda}$, $U^\dagger = e^{-\Lambda^\dagger}$, $\Lambda = \Lambda^a T^a$, $\chi \equiv \chi^a T^a$ i $V \equiv V^a T^a$. La comprovació en detall de la invariància gauge es troba a l'apèndix C. Per a $T =$ constant, l'expressió (3.10) difereix de treballs anteriors en aquesta línia [9] per termes quirals i antiquirals, els quals desapareixen trivialment en integrar sobre tot el superespai $\int \mathrm{d}^4\theta$ (v. apèndix B). No obstant això, quan considerem una dependència en θ no trivial per al supercamp T, com és ara el nostre cas (eq. (3.2)), aquests termes són no nuls i per tant cal tenir-los en compte.

3.1.2 Hipermultiplet

La matèria, constituïda de quarks i leptons, així com possiblement dels seus companys supersimètrics, apareixen a la teoria 5-dimensional com a components d'un hipermultiplet.

L'hipermultiplet consta, en la formulació *off-shell*, de dos escalars complexos, ϕ i ϕ^c, un fermió de Dirac (2 spinors de Weyl) $\Psi^T = (\psi, \bar{\psi}^c)$ i dos camps auxiliars complexos, F_Φ i F_{Φ^c}. En el llenguatge de supercamps de 4 dimensions, l'hipermultiplet està constituït de dos supercamps quirals $N = 1$, Φ i Φ^c. Si assumim que aquests multiplets estan carregats sota un cert grup de gauge i que, per tant, transformen com $\Phi \to U^{-1}\Phi$ i $\Phi^c \to \Phi^c U$, l'acció invariant gauge 5-dimensional per a l'hipermultiplet és

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \left\{ \int \mathrm{d}^4\theta \, \frac{1}{2}(T + T^\dagger) \left(\Phi^\dagger e^{-V} \Phi + \Phi^c e^V \Phi^{c\,\dagger} \right) \right. \\ \left. + \int \mathrm{d}^2\theta \, \Phi^c \Big[\partial_5 - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi \Big] \Phi + \text{h.c.} \right\}. \quad (3.13)$$

Si el valor esperat en el buit per al supercamp radió pren un valor real, $\langle T \rangle = R$, les equacions de moviment que s'obtenen per als camps auxiliars són

$$F_\Phi = \frac{1}{R} \left(\partial_5 + \frac{1}{2}(\Sigma - \mathrm{i}A_5) \right) \phi^{c\,\dagger}, \qquad F_\chi^a = \frac{g_5^2 R}{\sqrt{2}} \, \phi^\dagger T^a \phi^{c\,\dagger}, \quad (3.14)$$

$$F_{\Phi^c}^\dagger = -\frac{1}{R} \left(\partial_5 - \frac{1}{2}(\Sigma + \mathrm{i}A_5) \right) \phi, \qquad D^a = -\frac{\partial_5 \Sigma^a}{R^2} + \frac{g_5^2}{2} (\phi^\dagger T^a \phi - \phi^c T^a \phi^{c\,\dagger}). \quad (3.15)$$

Fent el mateix reescalament de Σ i λ que a la secció 3.1.1, i substituint els camps auxiliars per les expressions (3.14)–(3.15), l'acció (3.13) es converteix en

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \, \sqrt{-g} \left\{ -|D_M\phi|^2 - |D_M\phi^c|^2 + \mathrm{i}\bar{\Psi}\gamma^M D_M \Psi - \frac{1}{\sqrt{2}}(\phi^c \bar{\boldsymbol{\lambda}}_1 \Psi - \phi^\dagger \bar{\boldsymbol{\lambda}}_2 \Psi) + \text{h.c.} \right. \\ \left. - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\Psi}\Sigma\Psi - \frac{1}{4}(\phi_i^\dagger \Sigma^2 \phi_i) - \frac{g_5^2}{8} \sum_{m,a} (\phi_i^\dagger (\sigma^m)_{ij} T^a \phi_j)^2 \right\}, \quad (3.16)$$

on en els dos darrers termes hem definit $\{\phi_1, \phi_2\} \equiv \{\phi, \phi^{c\,\dagger}\}$ i la derivada covariant com $D_M = \partial_M - (\mathrm{i}/2)A_M^a T^a$. Cal notar que és possible dotar d'una massa supersimètrica a l'hipermultiplet,

$$\int \mathrm{d}^2\theta \, \Phi^c m \Phi + \text{h.c.} \quad (3.17)$$

Aquesta massa es pot incloure fàcilment realitzant a l'acció (3.13) la redefinició del supercamp quiral $\chi \to \chi - \sqrt{2}m$, que en l'acció final (3.16) correspon a la redifinició $\Sigma \to \Sigma - 2m$.

3.1.3 Termes de Fayet-Iliopoulos

L'acció anterior vàlida per a tot el *bulk* segueix essent vàlida si la dimensió extra està compactificada en un *orbifold* $S^1/\mathbb{Z}_2$. La compactificació en un orbifold ofereix, però, la possibilitat de tenir més termes en l'acció.

En teories abelianes on la dimensió extra és un orbifold pot existir també un terme com ara

$$S_{\rm FI} = -\int \mathrm{d}^5x \int \mathrm{d}^4\theta \; \xi \,\mathrm{sgn}(y) \big[\partial_5 V - \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + \chi^\dagger)\big] \, , \tag{3.18}$$

on $\mathrm{sgn}(y)$ és la funció signe definida sobre l'orbifold: $\mathrm{sgn}(y) = +1$ si $y \in (0,\pi)$, $\mathrm{sgn}(y) = -1$ si $y \in (\pi, 2\pi)$. Aquest terme és invariant sota transformacions de supersimetria, gauge i paritat $\mathbb{Z}_2$. Fent una integració per parts en l'expressió (3.18) tenim

$$S_{\rm FI} = \int \mathrm{d}^5x \int \mathrm{d}^4\theta \; 2\xi \big[\delta(y) - \delta(y-\pi)\big] V \, . \tag{3.19}$$

La integració sobre el superespai $\int \mathrm{d}^4\theta$ dóna lloc a un *tadpole* del camp auxiliar del multiplet de gauge abelià. Aquest tipus de termes, de forma genèrica $\int \mathrm{d}^4\theta\, V$, són invariants tant sota transformacions de gauge com sota transformacions supersimètriques i reben el nom de termes de Fayet-Iliopoulos (FI). És important remarcar que, contràriament al que passa en 4 dimensions, la presència d'un terme de Fayet-Iliopoulos no trenca necessàriament supersimetria o simetria gauge, ja que en el cas 5-dimensional és possible satisfer $\langle D \rangle = 0$ i alhora preservar la invariància gauge del buit. Això es pot veure fàcilment a partir de l'equació del moviment del camp auxiliar D, que es veu modificada respecte (3.8) com

$$D = -\frac{\partial_5 \Sigma}{R^2} - \frac{g_5^2}{R} \xi \big[\delta(y) - \delta(y-\pi)\big] \, . \tag{3.20}$$

D'aquí veiem que és possible tenir un buit supersimètric, $\langle D \rangle = 0$, amb la condició que el valor esperat en el buit del camp Σ tingui una dependència no trivial en y:

$$\langle \Sigma \rangle = -g_5^2 R\, \xi \int \mathrm{d}y\, \delta(y) = -\frac{g_5^2 R}{2} \xi \,\mathrm{sgn}(y) \, . \tag{3.21}$$

Cal fer notar que tot i que un terme com (3.19) no estigui present a la teoria original, es pot generar a nivell 1-*loop*, tant per camps situats a les parets com per camps residents en el *bulk*. La presència de termes FI localitzats a les parets indueix masses imparelles als hipermultiplets, les quals tenen importants implicacions fenomenològiques [17]. És per aquest motiu que els termes de Fayet-Iliopoulos (3.19) no representen un paràmetre addicional de la teoria, ja que els podem interpretar com a massa en el *bulk* per a l'hipermultiplet mitjançant la redefinició

$$\chi \longrightarrow \chi - \sqrt{2}\, \frac{g_5^2}{4}\, T \,\mathrm{sgn}(y) \, . \tag{3.22}$$

3.1.4 Els acoblaments *bulk*-paret

En les parets de l'orbifold, hipersuperfícies 4-dimensionals, hi podem incloure camps. Aquests camps respecten una supersimetria $N = 1$ i per tant la seva acció en forma de supercamps és l'habitual.

Amb el formalisme introduït a la secció anterior és fàcil obtenir els acoblaments entre els camps que viuen a les parets amb els camps que viuen al *bulk*. Si assumim que V i χ són parell i imparell respectivament sota la paritat $\mathbb{Z}_2$, el supercamp quiral χ s'anul·la a la paret i per tant únicament V es pot acoblar als camps que hi viuen. Pel que fa l'hipermultiplet, si assignem les paritats $\mathbb{Z}_2$ parella i imparella a Φ i Φ^c respectivament, només Φ aconseguirà acoblar-se als camps que viuen a les parets. Si suposem que els camps a la paret $y = 0$ provenen d'un supercamp quiral Q, podem sintetitzar tots els acoblaments possibles en l'acció següent:

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \left\{ \int \mathrm{d}^4\theta \left(Q^\dagger e^{-V} Q \right) + \int \mathrm{d}^2\theta\, W(\Phi, Q) + \text{h.c.} \right\} \delta(y)\,, \tag{3.23}$$

on W és un superpotencial arbitrari que depèn de Φ i Q (però no de $\Phi^\dagger$ o $Q^\dagger$ ja que W ha de ser holomorfa).

Els acoblaments a la paret $y = 0$ (3.23) modifiquen les equacions de moviment dels camps auxiliars en termes que depenen de $\delta(y)$.

$$\begin{aligned} D &= -\frac{\partial_5 \Sigma}{R^2} + \frac{g_5^2}{2} \delta(y) \big(Q^\dagger Q \big)\,, \\ F_\Phi &= \frac{1}{R} \left(\partial_5 + \frac{1}{2} (\Sigma - \mathrm{i} A_5) \right) \phi^{c\,\dagger} - \delta(y) \left. \frac{\partial W}{\partial \Phi} \right|_{\Phi = \phi} . \end{aligned} \tag{3.24}$$

De manera completament anàloga podem obtenir els acoblaments a la paret situada a $y = \pi$.

3.2 Acció en supercamps en un espaitemps corbat

L'acció anterior es pot generalitzar per a casos en què la dimensió extra està corbada. L'exemple més interessant és probablement el model de Randall-Sundrum [4], en el qual la dimensió extra està compactificada en un orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ de radi R, amb $-\pi \leq y \leq \pi$. L'espai 5-dimensional ve definit per la mètrica

$$\mathrm{d}s^2 = e^{-2R\sigma} \eta_{\mu\nu} \mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu + R^2 \mathrm{d}y^2\,, \tag{3.25}$$

on $\sigma \equiv k|y|$ i $1/k$ és el radi de curvatura. Aquest espai correspon a una llesca d'anti-de Sitter de cinc dimensions (AdS_5).

Per bé que el model de Randall-Sundrum ja ha estat supersimetritzat [18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25], fins ara l'ús de camps components ha estat l'única formulació utilitzada. En aquesta secció presentarem l'acció formulada en supercamps del model de Randall-Sundrum supersimètric.

3.2.1 Supermultiplet vectorial

L'acció per a un supercamp vectorial d'una teoria gauge abeliana ve donada per

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5 x \left\{ \frac{1}{4g_5^2} \int \mathrm{d}^2\theta \, T \, W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} \right. \\ \left. + \frac{2}{g_5^2} \int \mathrm{d}^4\theta \, \frac{e^{-(T+T^\dagger)\sigma}}{(T+T^\dagger)} \left(\partial_5 V - \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + \chi^\dagger) \right)^2 \right\} . \quad (3.26)$$

Les equacions del moviment per als camps auxiliars vénen donades per:

$$F_\chi = 0 \, , \qquad D = -\frac{e^{-2R\sigma}}{R^2} \left(\partial_5 - 2R\sigma' \right) \Sigma \, , \quad (3.27)$$

on $\sigma' = \partial_5 \sigma = k \, \mathrm{sgn}(y)$. Si reescalem els camps segons $\Sigma \to R\Sigma$, $\lambda_1 \to e^{-3R\sigma/2}\lambda_1$, $\lambda_2 \to -\mathrm{i}Re^{-R\sigma/2}\lambda_2$, obtenim finalment l'acció

$$S_5 = -\frac{1}{g_5^2} \int \mathrm{d}^5 x \, \sqrt{-g} \left\{ \frac{1}{2} \left(\partial_M \Sigma \right)^2 + \frac{1}{2} m_\Sigma^2 \Sigma^2 + \frac{1}{4} F_{MN}^2 \right. \\ \left. - \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i \gamma^M D_M \boldsymbol{\lambda}_i - m_\lambda \frac{\mathrm{i}}{2} \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i [\sigma_3]_{ij} \boldsymbol{\lambda}_j \right\} , \quad (3.28)$$

on $\sigma_3 = \mathrm{diag}(1, -1)$, $D_M \boldsymbol{\lambda}_i = \partial_M \boldsymbol{\lambda}_i + \Gamma_M [\sigma_3]_{ij} \boldsymbol{\lambda}_j$, essent Γ_M la connexió de spin, $\Gamma_M = (\sigma' \gamma_5 \gamma_\mu / 2, 0)$. Les matrius gamma $\gamma_M = (\gamma_\mu, \gamma_5)$ es defineixen en un espai corbat com $\gamma_M = e_M^A \gamma_A$, on e_M^A és la pèntada i γ_A són les matrius de Dirac en espai pla. Les masses dels camps Σ i λ que apareixen a (3.28) són

$$m_\Sigma^2 = -4k^2 + 2\frac{\sigma''}{R} \, , \qquad m_\lambda = \frac{1}{2}\sigma' \, . \quad (3.29)$$

Aquestes masses vénen fixades per supersimetria. Es pot arribar a un resultat idèntic per a les masses imposant la invariància de (3.28) sota les transformacions de supersimetria [18].

3.2.2 Hipermultiplet

L'acció ve donada per

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5 x \left\{ \int \mathrm{d}^4\theta \, \frac{1}{2}(T + T^\dagger) e^{-(T+T^\dagger)\sigma} \left(\Phi^\dagger e^{-V} \Phi + \Phi^c e^V \Phi^{c\,\dagger} \right) \right. \\ \left. + \int \mathrm{d}^2\theta \, e^{-3T\sigma} \, \Phi^c \Big[\partial_5 - \frac{1}{\sqrt{2}}\chi - \Big(\frac{3}{2} - c \Big) T\sigma' \Big] \Phi + \text{h.c.} \right\} , \quad (3.30)$$

on hem parametritzat la massa imparella de l'hipermultiplet com $c\sigma'$ [18]. Si negligim les contribucions degudes al supermultiplet vectorial, els camps auxiliars vénen donats per

$$F_\Phi = \frac{e^{-R\sigma}}{R}\Big[\partial_5 + \Big(\frac{3}{2} - c\Big)R\sigma'\Big]\phi^{c\,\dagger}\,, \tag{3.31}$$

$$F^\dagger_{\Phi^c} = -\frac{e^{-R\sigma}}{R}\Big[\partial_5 - \Big(\frac{3}{2} - c\Big)R\sigma'\Big]\phi\,. \tag{3.32}$$

Fent el reescalament $\Psi \to e^{-R\sigma/2}\Psi$ obtenim finalment:

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x\,\sqrt{-g}\,\Big\{\big(-|\partial_M\phi|^2 - |\partial_M\phi^c|^2 - m^2_\phi|\phi|^2 - m^2_{\phi^c}|\phi^c|^2 + \mathrm{i}\bar\Psi\gamma^M(\partial_M + \Gamma_M)\Psi - \mathrm{i}m_\Psi\bar\Psi\Psi\big)\Big\}\,, \tag{3.33}$$

on

$$m^2_{\phi,\phi^c} = \Big(c^2 \pm c - \frac{15}{4}\Big)k^2 + \Big(\frac{3}{2} \mp c\Big)\frac{\sigma''}{R}\,, \qquad m_\Psi = c\sigma'\,. \tag{3.34}$$

Aquest mateix resultat ha estat obtingut [18] imposant invariància sota transformacions supersimètriques en el fons gravitatori (3.25).

3.2.3 Teoria efectiva 4-dimensional a baixes energies

A energies per sota de les excitacions de Kaluza-Klein, que en el cas corbat són de l'ordre de $ke^{-Rk\pi}$, els estats KK són pesats i poden ser integrats per acabar obtenint una teoria efectiva que conté únicament el sector no-massiu.

En el cas del supercamp vectorial, el sector no massiu correspon al mode zero del supercamp V. La funció d'ona $f_0(y)$ ve determinada per l'equació del moviment $\partial_5 f_0(y) = 0$ i per tant no depèn de la coordenada y [26, 27, 28]. El lagrangià 4-dimensional efectiu per al mode no massiu de V és aleshores el mateix que el d'una teoria amb la dimensió extra plana:

$$\mathcal{L}_{4D} = \frac{\pi}{2g_5^2}\int \mathrm{d}^2\theta\, T\, W^\alpha W_\alpha + \mathrm{h.c.}\,. \tag{3.35}$$

Per a l'hipermultiplet, tan sols el supercamp quiral Φ, parell sota $\mathbb{Z}_2$, pot contenir un mode no massiu. La seva funció d'ona haurà de satisfer $[\partial_5 - (3/2-c)T\sigma']f_0(y) = 0$, que té com a solució $f_0(y) = \exp[(3/2-c)T\sigma]$. Integrant la coordenada y del lagrangià 5-dimensional obtenim el lagrangià efectiu

$$\mathcal{L}_{4D} = \int \mathrm{d}^4\theta\; \frac{1}{(1/2-c)\,k}\Big(\exp\Big[(1/2-c)(T+T^\dagger)k\pi\Big] - 1\Big)\,\Phi^\dagger e^{-V}\Phi\,. \tag{3.36}$$

3.2.4 Acoblaments *bulk*-parets

Si un supercamp quiral Q viu a la paret $y = 0$ els acoblaments entre la paret i el *bulk* són els mateixos que a (3.23). Des d'un punt de vista fenomenològic és més interessant l'acoblament a l'altra paret, situada a $y = \pi$.

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \left\{ \int \mathrm{d}^4\theta \, e^{-(T+T^\dagger)k\pi} \Big(Q^\dagger e^{-V} Q \Big) + \int \mathrm{d}^2\theta \, e^{-3Tk\pi} W(\Phi, Q) + \text{h.c.} \right\} \delta(y - \pi) \,. \quad (3.37)$$

3.3 Trencament de Supersimetria pel terme F del radió

Com a aplicació de l'acció trobada a la seccions anteriors calcularem l'espectre de masses que s'obté quan es trenca supersimetria proporcionant un valor esperat en el buit al terme F del supercamp del radió:

$$\langle F_T \rangle \neq 0 \longrightarrow \text{Trencament de Supersimetria.} \quad (3.38)$$

Analitzarem els dos casos considerats a les seccions anteriors, el cas pla i el corbat. Quan la dimensió extra és plana (mètrica (3.1)) l'espectre de masses induït per un valor esperat de F_T independent de y, $\langle F_T \rangle =$ constant, coincideix amb el que s'obté en models amb trencament de supersimetria *à la* Scherk-Schwarz. Per al cas corbat considerarem l'escenari en què F_T és diferent de zero només a la paret $y = \pi$; veurem que en aquest cas el terme de trencament està suprimit de manera exponencial, tot generant masses *soft* petites.

3.3.1 Dimensió extra plana

El model més senzill per a proporcionar un valor esperat en el buit al terme F del radió és el *no-scale model* [29]. En aquest model l'acció en supercamps ve donada per

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \left\{ -3M_5^3 \int \mathrm{d}^4\theta \, \varphi^\dagger \varphi \, \frac{(T + T^\dagger)}{2} + \int \mathrm{d}^2\theta \, \varphi^3 W + \text{h.c.} \right\}, \quad (3.39)$$

on W, que apareix en teories de supergravetat *gauged*[3] [30, 31, 32, 33], juga un paper anàleg al d'un superpotencial. Considerem que W és independent de la coordenada y i real. L'expressió (3.39) correspon a l'acció efectiva del radió d'una

[3] en les supergravetats *gauged* el grup d'automorfismes de l'àlgebra supersimètrica és promocionat a simetria local.

dimensió extra plana. Hem introduït el supercamp espectador (no físic) φ, anomenat *compensador conforme* [34, 35], que permet incorporar els efectes de supergravetat al potencial efectiu del radió. Gràcies al supercamp φ l'acció 4-dimensional de supergravetat és manifestament invariant sota una transformació conforme. El trencament del grup superconforme al grup super-Poincaré ve parametritzat per la component escalar del supercamp φ, mentre que el terme F_φ correspon a la component auxiliar del supermultiplet de gravetat.

$$\varphi = 1 + \theta^2 F_\varphi \,. \tag{3.40}$$

De (3.39) obtenim

$$F_T = \frac{2W}{M_5^3}, \qquad\qquad F_\varphi = 0\,, \tag{3.41}$$

que dóna lloc, a nivell arbre, a un potencial nul per al radió. Per tant, si el valor esperat en el buit de W és diferent de zero, la supersimetria està trencada per un F_T no nul però amb energia del buit (constant cosmològica) nul·la. Aquest és precisament el tret distintiu dels *no-scale models.*

Aquest és un exemple molt simple de trencament de supersimetria mitjançant $\langle F_T\rangle$ no nul. Malauradament, aquest model no estabilitza el radi R i és per tant incomplet. Hi ha hagut a la literatura diferents mecanismes que permeten estabilitzar el radi. Alguns d'ells es basen en la presència de camps massius addicionals [36], mentre que d'altres requereixen sectors de Yang-Mills escollits convenientment [14]. En el que segueix assumirem que el radi està estabilitzat sense que el mecanisme responsable afecti les relacions (3.41).

Derivem ara les masses *soft* en el sector gauge per a aquest escenari. Prenent $\langle T\rangle = R + \theta^2 F_T$ a l'equació (3.7), obtenim una massa extra per als gauginos 5-dimensionals:

$$\mathcal{L}_{\rm soft} = \frac{1}{2}\frac{F_T}{2R}\,\boldsymbol{\lambda}_i^T C \boldsymbol{\lambda}_i\,, \tag{3.42}$$

on C és la matriu de conjugació de càrrega en 5 dimensions. El terme induït (3.42) és una massa de Majorana. En el cas de l'orbifold $S^2/\mathbb{Z}_2$, la descomposició de Kaluza-Klein dels camps 5-dimensionals ve donada per

$$\lambda_1(x^\mu, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \cos(ny)\,\lambda_1^{(n)}(x^\mu) \tag{3.43}$$

$$\lambda_2(x^\mu, y) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin(ny)\,\lambda_2^{(n)}(x^\mu), \tag{3.44}$$

i els termes de masses dels gauginos que apareixen en 4 dimensions són, després d'integrar sobre y,

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{\text{mass}} = &\frac{F_T}{2R}\lambda_1^{(0)}(x^\mu)\lambda_1^{(0)}(x^\mu) + \\ &\frac{1}{R}\sum_{n=1}^{\infty}\begin{pmatrix}\lambda_1^{(n)}(x^\mu) & \lambda_2^{(n)}(x^\mu)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_T/2 & n \\ n & F_T/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\lambda_1^{(n)}(x^\mu) \\ \lambda_2^{(n)}(x^\mu)\end{pmatrix} + \text{h.c.},\end{aligned} \tag{3.45}$$

que generen masses de Majorana de l'estil $|F_T/2 \pm n|/R$, on $n \in \mathbb{Z}$. Aquest és exactament el mateix espectre de masses que apareix en models amb trencament de supersimetria *à la* Scherk-Schwarz, on els camps carregats sota el grup de simetria R d'automorfismes adquireixen massa. La correspondència entre els dos mecanismes de trencament és

Mecanisme:	Valor esperat per a F_T		Scherk-Schwarz
Paràmetre:	$F_T/2$	$\longleftrightarrow$	q_R

o, el que és el mateix, $W/M_5^3 = q_R$, on q_R és la càrrega R sota l'automorfisme $\mathrm{SU}(2)_R$ (v. (2.3)). Quan $F_T = 1$ obtenim el mateix espectre de masses per als gauginos de la referència [13]. L'escalar Σ no adquireix cap massa, fet que en el llenguatge de Scherk-Schwarz s'explica per la càrrega R nul·la del camp Σ.

És d'esperar, vist el paral·lelisme entre els dos mecanismes, que els escalars de l'hipermultiplet, carregats sota la simetria R de la teoria, adquireixin massa en donar un valor esperat en el buit no nul a F_T. De (3.13) es pot veure fàcilment que un valor no nul per a $\langle F_T \rangle$ dóna una contribució extra als termes F dels escalars. L'equació del moviment per als camps auxiliars és, prescindint del sector gauge,

$$F_\Phi = \frac{1}{R}\left([\partial_5 + \mathrm{i}\alpha]\phi^{c\,\dagger} - \frac{1}{2}F_T\phi\right), \tag{3.46}$$

$$F_{\Phi^c}^\dagger = -\frac{1}{R}\left([\partial_5 + \mathrm{i}\alpha]\phi + \frac{1}{2}F_T\phi^{c\,\dagger}\right), \tag{3.47}$$

on hem inclòs una massa supersimètrica $m = \mathrm{i}\alpha$ (3.17), la utilitat de la qual es farà evident tot seguit. Després de fer la reducció de Kaluza-Klein en cercle S^1 i imposant condicions de contorn periòdiques, el terme de masses per als escalars té la forma següent:

$$\mathcal{L}_{\text{mass}} = \frac{-1}{R^2}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\begin{pmatrix}\phi^{(n)\,\dagger} & \phi^{c\,(n)\,\dagger}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(n+\alpha)^2 + F_T^2/4 & \mathrm{i}(n+\alpha)F_T \\ -\mathrm{i}(n+\alpha)F_T & (n+\alpha)^2 + F_T^2/4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi^{(n)} \\ \phi^{c\,(n)}\end{pmatrix}, \tag{3.48}$$

que correspon a escalars amb masses $|n + \alpha \pm F_T/2|/R$. Els fermions que formen part de l'hipermultiplet no adquireixen massa *soft* i per tant el seu espectre de masses ve donat per $|n + \alpha|/R$.

Podem comparar l'espectre de masses (3.48) amb el dels models de les referències [10, 11, 12], en les quals la supersimetria és trencada amb el mecanisme de SS, i amb el de la referència [13] en què la supersimetria es trenca en compactificar en $S^1/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ [4]

A la ref. [13] els quarks i els leptons formen part d'hipermultiplets que, en la notació d'aquest treball, tenen massa supersimètrica nul·la, $\alpha = 0$, i $\langle F_T \rangle = 1$. Pel que fa al Higgs, per tal d'obtenir-ne l'espectre de masses tal com a la referència [13], hem d'absorbir la massa supersimètrica $m = \mathrm{i}\alpha$ de l'hipermultiplet fent ús de la redefinició [5]

$$\Phi' = e^{\mathrm{i}\alpha y}\Phi\,, \qquad \Phi^{c\,\prime} = e^{-\mathrm{i}\alpha y}\Phi^c\,, \tag{3.49}$$

i cal assignar les següents paritats $\mathbb{Z}_2$:

$$\Phi'(y) \longrightarrow \Phi'(-y)\,, \tag{3.50}$$

$$\Phi^{c\,\prime}(y) \longrightarrow -\Phi^{c\,\prime}(-y)\,. \tag{3.51}$$

Si $\alpha = 1/2$, la descomposició de Kaluza-Klein en l'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ ve donada per

$$\Phi' = \sum_n \cos[(n+1/2)y]\Phi^{(n)}(x)\,, \tag{3.52}$$

$$\Phi^{c\,\prime} = \sum_n \sin[(n+1/2)y]\Phi^{c\,(n)}(x)\,. \tag{3.53}$$

on $n = 0, 1, 2, \ldots$ L'espectre de masses és supersimètric i ve donat per $|n+1/2|/R$. Trenquem ara supersimetria donant un valor esperat en el buit a F_T. La matriu de masses dels escalars ara vindrà donada per l'eq. (3.48) amb $\alpha = 1/2$ i $n = 0, 1, 2, \ldots$, amb la qual cosa les masses dels escalars seran $|n + 1/2 \pm F_T/2|/R$. Per a $F_T = 1$ obtenim el mateix espectre de masses que el del Higgs de la referència [13]. Hi ha un escalar no massiu que és el que associem amb el Higgs del Model Estàndard.

A les referències [10, 11, 12] els quarks i leptons estan localitzats a les parets de l'orbifold, mentre que el Higgs viu en el *bulk*. Per tal de proporcionar massa als fermions el sector de Higgs ha de consistir en dos hipermultiplets (Φ_i, Φ_i^c) $i = 1, 2$. Si fem les assignacions de paritat $\mathbb{Z}_2$ $\Phi(y) \to \eta\Phi(-y)$, amb $\eta = +1(-1)$ per a Φ_1 i Φ_2^c (Φ_1^c i Φ_2), el sector de Higgs es pot escriure com

$$S_5 = \int \mathrm{d}^5x \left\{ \int \mathrm{d}^4\theta\, \frac{1}{2}(T + T^\dagger)\, \left(\Phi_i^\dagger \Phi_i + \Phi_i^c \Phi_i^{c\,\dagger}\right) \right.$$
$$\left. + \int \mathrm{d}^2\theta\, \Phi_i^c(\partial_5 \delta_{ij} + m\epsilon_{ij})\Phi_j + \text{h.c.} \right\}, \tag{3.54}$$

---

[4] La compactificació en $S^1/\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2'$ és de fet equivalent a una compactificació en l'orbifold $S^1/\mathbb{Z}_2$ i una aplicació del mecanisme de SS.

[5] Aquesta dependència en y de l'hipermultiplet es pot interpretar com el resultat d'imposar la condició de contorn supersimètrica $\Phi'(x, y + 2\pi) = e^{\mathrm{i}2\pi\alpha}\Phi'(x, y)$, i semblantment per a $\Phi^{c\,\prime}$.

on hem introduït una massa supersimètrica m, compatible amb la paritat $\mathbb{Z}_2$.

Quan $\langle F_T \rangle \neq 0$, els escalars tenen una massa donada per $|m - F_T/2 \pm n|/R$ i $|m + F_T/2 \pm n|/R$, mentre que el sector fermiònic té masses $|m \pm n|/R$. Aquest espectre és idèntic al de les referències [10, 11, 12], només fent la identificació $m = q_H$ i $F_T = 2q_R$.

En resum, hem mostrat que un potencial W constant (independent de la coordenada y) provoca un trencament de supersimetria parametritzat pel terme F del radió, i dóna lloc al mateix espectre de masses que l'obtingut en models en què el trencament es produeix per condicions de contorn, o mecanisme de Scherk-Schwarz.

En particular, hem reproduït l'espectre de masses dels models [10, 11, 12] i [13]. Degut a que la supersimetria es trenca gràcies a l'adquisició per part d'F_T d'un valor esperat en el buit, el goldstino[6] correspondrà a la component fermiònica del supercamp T, és a dir, a la cinquena component del gravitino *right-handed* Ψ^5_R. Aquest mateix resultat, derivat d'una manera completament diferent, ha estat obtingut a les referències [37, 38].

Ens podem preguntar què succeeix quan W està localitzat a la paret en lloc del *bulk*. Sempre que en moguem en el marc de la teoria efectiva a baixes energies —la que descriu la física a règims d'energia inferiors a les masses de Kaluza-Klein i que per tant conté únicament els modes zero— no hi haurà diferència respecte el cas en què W és constant en tot el *bulk* sempre que $W/M_5^3 \ll 1$ i els modes zero puguin ésser considerats més lleugers que les excitacions de Kaluza-Klein. En aquest cas, la massa dels gauginos, eq. (3.42) està localitzada a la paret i per tant només podrà afectar als modes parells sota paritat $\mathbb{Z}_2$:

$$\mathcal{L}_{\text{soft}} = \frac{\delta(y)}{R} \frac{W}{M_5^3} \lambda_1 \lambda_1 + \text{h.c.}\,, \tag{3.55}$$

per a un λ_1 canònicament normalitzat. Aquest terme de masses es pot interpretar, a la vista de l'eq. (3.7), com el resultat d'un F_T localitzat: $F_T = 2\delta(y) W/M_5^3$. El terme de masses (3.55) produeix una barreja entre les diferents excitacions de Kaluza-Klein. A fi d'obtenir l'espectre de masses haurem de redefinir els estats de Kaluza-Klein mitjançant una diagonalització. Això no obstant, és molt més senzill obtenir l'espectre de masses a partir de l'equació de moviment 5-dimensional dels gauginos, amb el terme (3.55) inclòs [39]. Considerarem aquest escenari amb trencament de supersimetria en un espaitemps corbat.

3.3.2 Dimensió extra corbada

La situació més interessant en escenaris on la dimensió extra està corbada correspon a un trencament de supersimetria localitzat a la paret $y = \pi$. En aquesta situació

[6] El goldstino, o fermió de Goldstone, és el camp fermiònic sense massa que apareix associat al trencament espontani de la supersimetria global.

les masses *soft* estan exponencialment suprimides, de manera que tenim en principi un mecanisme que explica la jerarquia entre l'escala electrofeble i l'escala de Planck [18, 40, 41, 42].

Aquí considerarem els efectes d'un terme de superpotencial W situat a la paret $y = \pi$. Aquest terme trenca supersimetria tot induint un terme de massa per als gauginos donat per

$$\mathcal{L}_{\rm soft} = \frac{\delta(y-\pi)}{R}\frac{e^{-Rk\pi}W}{M_5^3}\lambda_1\lambda_1 + \text{h.c.}\,. \tag{3.56}$$

La contribució (3.56) desplaça l'espectre de masses dels gauginos respecte el dels seus companys supersimètrics, els bosons de gauge. Els valors propis de massa m_n dels gauginos es calcula a continuació.

Càlcul de l'espectre

Calculem l'espectre de masses del gaugino en una teoria amb dimensió extra corbada i en la qual el trencament de supersimetria indueix un terme de massa de Majorana a la paret, com a (3.56).

Redefinint $\lambda_i \to e^{-2R\sigma}\lambda_i$ $i = 1, 2$ a fi d'absorbir el terme de connexió de spin, les equacions del moviment per als gauginos són

$$\mathrm{i}e^{R\sigma}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2 + \frac{1}{R}(\partial_5 + \frac{1}{2}R\sigma')\bar{\lambda}_1 = 0\,, \tag{3.57}$$

$$\mathrm{i}e^{R\sigma}\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_1 - \frac{1}{R}(\partial_5 - \frac{1}{2}R\sigma')\bar{\lambda}_2 - \frac{1}{2}\frac{W}{M_5^3 R}\delta(y-\pi)\bar{\lambda}_1 = 0\,. \tag{3.58}$$

Solucionarem aquestes equacions en el *bulk*, ignorant qualsevol efecte que pugui generar la massa a la paret; aquests efectes s'introduiran a l'hora d'imposar les condicions de contorn sobre les solucions. Busquem solucions del tipus $\lambda_i(x, y) = \sum f_i^{(n)}(y)\,\lambda^{(n)}(x)$; introduint-les dins (3.57)–(3.58) i fent ús de les relacions d'ortogonalitat entre modes s'arriba a l'equació diferencial de segon ordre

$$\left[\frac{1}{R^2}e^{R\sigma}\partial_5(e^{-R\sigma}\partial_5) - \left(\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}\right)k^2\right]f_{1,2}^{(n)}(y) = e^{2R\sigma}m_n^2 f_{1,2}^{(n)}(y)\ , \tag{3.59}$$

que té per solucions

$$f_1^{(n)}(y) = \frac{e^{R\sigma/2}}{N_n}\left[J_1\left(\frac{m_n}{k}e^{R\sigma}\right) + b_1(m_n)Y_1\left(\frac{m_n}{k}e^{R\sigma}\right)\right], \tag{3.60}$$

$$f_2^{(n)}(y) = \frac{\sigma'}{k}\frac{e^{R\sigma/2}}{N_n}\left[J_0\left(\frac{m_n}{k}e^{R\sigma}\right) + b_2(m_n)Y_0\left(\frac{m_n}{k}e^{R\sigma}\right)\right], \tag{3.61}$$

on els coeficients b_i i els paràmetres m_n vindran determinats per les condicions de contorn i N_n són constants de normalització.

Estudiem ara les condicions de contorn. Tenint en compte l'assignació de paritat $\mathbb{Z}_2$, $f_i^{(n)}(y)$ ha de satisfer les següents condicions de contorn a la paret $y = 0$ (on no hi ha masses localitzades):

$$f_2^{(n)}(y)\Big|_{y=0} = 0 \tag{3.62}$$

$$\left(\frac{d}{dy} + \frac{R}{2}\sigma'\right) f_1^{(n)}(y)\Big|_{y=0} = 0\,, \tag{3.63}$$

on recordem que σ' és de fet $k\,\mathrm{sgn}(y)$. Les condicions (3.62)– (3.63) impliquen

$$b_1(m_n) = b_2(m_n) = -\frac{J_0\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_0\left(\frac{m_n}{k}\right)}\,. \tag{3.64}$$

Per altra banda, la presència de masses de Majorana pels gauginos a la paret $y = \pi$ en l'equació (3.58) modifica les condicions de contorn anteriors

$$f_2^{(n)}(\pi) = \frac{1}{2}\frac{W}{2M_5^3 R} f_1^{(n)}(\pi)\,. \tag{3.65}$$

Les equacions (3.64) i (3.65) ens duen a

$$\begin{aligned} 2\Big[J_0\left(\frac{m_n}{k}e^{Rk\pi}\right) - \frac{J_0\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_0\left(\frac{m_n}{k}\right)} Y_0\left(\frac{m_n}{k}e^{Rk\pi}\right)\Big] \\ = \frac{W}{2M_5^2 R}\Big[J_1\left(\frac{m_n}{k}e^{Rk\pi}\right) - \frac{J_0\left(\frac{m_n}{k}\right)}{Y_0\left(\frac{m_n}{k}\right)} Y_1\left(\frac{m_n}{k}e^{Rk\pi}\right)\Big]\,, \end{aligned} \tag{3.66}$$

relació que determina l'espectre de masses. Busquem les solucions de (3.66) en el límit $kR \gg 1$. Per als modes més lleugers podem prendre el límit $m_n e^{Rk\pi}/k \equiv \epsilon \ll 1$ a l'eq. (3.66), la qual esdevé en aquest règim

$$2 = \frac{W}{2M_5^3}\left[\frac{\epsilon}{2} - \frac{1}{\pi k R}\frac{1}{\epsilon}\right]\,. \tag{3.67}$$

Si el trencament de supersimetria és petit, $W/M_5^3 \ll 1$, l'única solució a (3.67) compatible amb $\epsilon \ll 1$ ve donada per

$$m \simeq \frac{W}{4M_5^3 \pi R} e^{-Rk\pi}\,. \tag{3.68}$$

Aquesta és la massa que correspon al mode zero. En el límit de trencament de supersimetria gran, $W/M_5^3 \gg 1$, les dues solucions de (3.67) corresponen a

$$m \simeq \pm\sqrt{\frac{2}{\pi k R}} k e^{-Rk\pi}\,. \tag{3.69}$$

Cal fer notar que no hi ha dependència en W. Pel que fa als modes pesats de Kaluza-Klein, les masses es poden obtenir fàcilment de (3.66). En el límit $\epsilon > 1$ la condició se simplifica a

$$\frac{J_0\left(\frac{m_n}{k}e^{Rk\pi}\right)}{J_1\left(\frac{m_n}{k}e^{Rk\pi}\right)} = \frac{W}{4M_5^3}\,. \tag{3.70}$$

Si el trencament és, en canvi, feble l'espectre de masses de Majorana és aproximadament

$$m_n \simeq \left(n + \frac{3}{4} \pm \frac{W}{4\pi M_5^3}\right)\pi k e^{-Rk\pi}\,, \quad \text{on } n = 1, 2, \dots\,, \tag{3.71}$$

mentre que en el límit de trencament de supersimetria gran tenim que

$$m_n \simeq \left(n + \frac{1}{4} \pm \frac{4M_5^3}{\pi W}\right)\pi k e^{-Rk\pi}\,. \tag{3.72}$$

En el límit $W/M_5^3 \to \infty$ les masses de Majorana dels gauginos no presenten cap dependència en W:

$$\pm\sqrt{\frac{2}{Rk\pi}}ke^{-Rk\pi}\,,\ \pm\frac{5}{4}\pi k e^{-Rk\pi}\,,\ \pm\frac{9}{4}\pi k e^{-Rk\pi}\,, \dots \tag{3.73}$$

A més, en aquest règim els gauginos es poden combinar per formar fermions de Dirac i la teoria esdevé invariant sota $\mathrm{U}(1)_R$. Aquest és exactament el mateix espectre que el que s'obté en trencar supersimetria mitjançant condicions de contorn diferents per a bosons i fermions [40].

Teoria efectiva 4-dimensional a baixes energies per al radió

A l'apartat anterior hem vist que en el límit en què el trencament de supersimetria és "petit", únicament els modes zero de la teoria pateixen un canvi substancial mentre que les masses KK, en canvi, reben només petites correccions. Podem analitzar aquests efectes considerant la teoria efectiva a energies inferiors a les masses KK, que conté només els modes zero. Ja hem presentat la teoria efectiva per al supermultiplet vectorial i per a l'hipermultiplet a les equacions (3.35) i (3.36), respectivament. Per al radió el lagrangià efectiu ve donat per [43, 44]

$$\mathcal{L}_{4D} = -\frac{6M_5^3}{k}\int \mathrm{d}^4\theta\, \varphi^\dagger\varphi(1 - e^{-(T+T^\dagger)k\pi}) + \int \mathrm{d}^2\theta\, \varphi^3\Big[W_0 + e^{-3Tk\pi}W + \mathrm{h.c.}\Big]\,, \tag{3.74}$$

on W_0 i W són els superpotencials a la paret situada a $y = 0$ i $y = \pi$ respectivament. El superpotencial W_0 ha estat introduït per tal de cancel·lar la constant cosmològica, tal com veurem tot seguit. De (3.74), obtenim les equacions del moviment per als camps auxiliars

$$F_T = e^{-Rk\pi}\frac{W}{2\pi M_5^3} + \frac{W_0}{2\pi M_5^3}\,, \qquad F_\varphi = \frac{kW_0}{2M_5^3}\,, \tag{3.75}$$

i el potencial efectiu del radió

$$V = \frac{3k}{2M_5^3}\left(e^{-4Rk\pi}|W|^2 - |W_0|^2\right) . \tag{3.76}$$

A diferència del cas pla, un superpotencial W constant no garanteix una constant cosmològica nul·la. De fet, s'ha d'ajustar el valor de $|W_0|^2$ a $e^{-4Rk\pi}|W|^2$ per tal que constant cosmològica s'anul·li. En aquest cas obtenim

$$F_T = \frac{W}{2\pi M_5^3}e^{-Rk\pi} , \qquad F_\varphi = \pi F_T e^{-Rk\pi} . \tag{3.77}$$

D'aquí veiem que, tal com esperàvem, el terme F del radió està suprimit exponencialment i que F_φ, tot i que no nul, és exponencialment més petit que F_T.

Encara que aquest no és un model realista, ja que el radi R no està estabilitzat, sí que constitueix un exemple simple d'escenari amb trencament de supersimetria on el paràmetre de trencament està suprimit exponencialment, $F_T \sim e^{-Rk\pi}$. Donant un valor esperat en el buit diferent de zero per a F_T a les expressions (3.35) i (3.36), obtenim les masses següents, que apareixen com a conseqüència del trencament

$$m_{\lambda_1} = \frac{F_T}{2R} , \qquad m_\phi = \left|\frac{(1/2-c)k\pi F_T}{2\sinh[(1/2-c)Rk\pi]}\right| . \tag{3.78}$$

Convé remarcar que m_ϕ presenta un màxim per a $c = 1/2$ i tendeix a exponencialment cap a zero a mesura que c es desvia d'aquest valor.

Correspondència AdS-CFT

El resultat de (3.78) té una interpretació 4-dimensional interessant fent servir la correspondència AdS/CFT, que es basa en la conjectura segons la qual teories que viuen a AdS_5 són duals a teories conformes 4-dimensionals fortament acoblades (CFT) en el límit de gran N [45].

Aquesta correspondència entre teories AdS i CFT ha estat estesa a escenaris com el de Randall-Sundrum, proveint així d'un mètode útil per a entendre la física d'aquest model 5-dimensional des del punt de vista de 4 dimensions, al qual estem més habituats.

Per exemple, s'ha provat que situar la paret a $y = 0$ en l'espai AdS_5 correspon, en la imatge dual 4-dimensional, a trencar el grup conforme amb la introducció d'un *cutoff* ultravioleta a k i a l'addició de nous graus de llibertat (v. per exemple [46]). Per al cas d'una teoria 5-dimensional amb gravetat i un sector de gauge en el *bulk* aquests nous graus de llibertat corresponen a una teoria amb un gravitó i un bosó de gauge acoblats a la teoria conforme CFT. A la vegada, aquesta teoria 4-dimensional correspon a la promoció a simetria local (*gauging*) tant de la simetria Poincaré com d'una simetria global de la teoria de camps conforme.

La presència de la paret a $y = \pi$ té una interpretació diferent en el dual de 4 dimensions. Correspon al trencament espontani del grup conforme a l'escala $ke^{-Rk\pi}$. El radió s'associa amb el bosó de Goldstone que apareix en trencar-se la simetria conforme, Goldstone que rep en aquest cas el nom de *dilató*. Aquesta correspondència ha estat comprovada per diferents camins a les referències [47, 48, 49].

Sota una transformació conforme $g_{\mu\nu} \to \Omega^2 g_{\mu\nu}$, els supercamps de la teoria efectiva a les eqs. (3.35)–(3.37) han de transformar segons

$$T \longrightarrow T + \frac{1}{k\pi} \ln \Omega \,, \tag{3.79}$$

$$V \longrightarrow V \,, \tag{3.80}$$

$$\Phi \longrightarrow \Omega^{(c-3/2)} \Phi \,, \tag{3.81}$$

$$Q \longrightarrow Q \,. \tag{3.82}$$

a fi de mantenir el lagrangià invariant.

Ara bé, el lagrangià format per (3.35) i (3.36) no és completament invariant sota les transformacions(3.79)–(3.82) degut a la presència de la paret situada a $y = 0$.

A les equacions (3.35) l'acoblament entre el supercamp T i el multiplet vectorial trenca la simetria conforme. Des del punt de vista 4-dimensional, aquest trencament correspon a l'acoblament entre el dilató i el supermultiplet vectorial a nivell 1-*loop* gràcies a l'anomalia conforme. En 5 dimensions apareix a nivell arbre segons la relació de dualitat [47, 48, 49] $g_5^2 b_{CFT}/(8\pi^2) = 1/k$. Per al mode zero de l'hipermultiplet, eq. (3.36), l'efecte de la paret a $y = 0$ és exponencialment suprimit per a $c \ll 1/2$. En aquest límit el mode zero està localitzat a la paret $y = \pi$ i correspon en la visió 4-dimensional a un estat lligat que apareix com a resultat del trencament espontani de la CFT.

El model proposat, en el qual la supersimetria es trenca gràcies al terme F del radió, correspon en llenguatge de 4 dimensions a trencar supersimetria amb el terme F del dilató. Hi ha un cert paral·lelisme amb models amb trencament de simetria mediat per anomalies (AMSB), en els quals el trencament de supersimetria ve parametritzat pel terme F del compensador conforme φ. En models AMSB les masses dels escalars i dels gauginos vénen generats a 1-*loop* per l'anomalia conforme. En el nostre cas el paper del compensador conforme φ el juga el supercamp T. En 4 dimensions l'anomalia és també la responsable que els gauginos adquireixin massa. La massa de l'escalar ϕ tendeix a zero a nivell arbre en el límit conforme $c \ll 1/2$, però es genera a 1-*loop*, com en AMSB, degut a la renormalització de la funció d'ona. En el límit contrari, $c \gg 1/2$, el mode zero de l'hipermultiplet es localitza a la paret $y = 0$ i correspon en la visió 4D a un nou grau de llibertat. En aquest cas la seva massa a nivell arbre és també petita ja que l'acoblament directe amb el dilató —que apareix de CFT— està suprimida exponencialment.

Capítol 4

Conclusions

La supersimetria i l'existència de dimensions extra són extensions de l'SM d'interès innegable. A part de ser ingredients bàsics a les teories de cordes, tant la supersimetria com les dimensions extra permeten comprendre fenomens que l'SM no és capaç d'explicar, com ara el problema de la jerarquia o l'origen del trencament de la simetria electrofeble.

Aquest treball de recerca presenta l'acció supersimètrica en 5 dimensions, amb la dimensió extra compacta, d'una teoria gauge en el formalisme de supercamps $N = 1$. L'ús d'aquest formalisme presenta avantatges evidents. En el formalisme de supercamps $N = 1$ la invariància sota les transformacions supersimètriques és manifesta, i és trivial l'obtenció dels acoblaments entre matèria localitzada a les parets i la situada en el *bulk*. Per altra banda, el formalisme de supercamps permet identificar automàticament quins són els paràmetres de la teoria que renormalitzen, gràcies al teoremes de no-renormalització. El formalisme presentat incorpora el radió en forma de supercamp, cosa que ens permet escriure l'acció de camps que viuen tant en una dimensió extra plana com en una de corbada. Per a una dimensió extra plana, l'acció ve donada per les expressions (3.7) i (3.13), mentre que per a una dimensió corbada com en el model de Randall-Sundrum, l'acció ve donada per les expressions (3.26) i (3.30).

Com a aplicació de la formulació introduïda en aquest treball, hem estudiat el trencament de supersimetria a través del camp auxiliar del radió, que adquireix un valor esperat en el buit. Hem provat que en el cas en què la dimensió extra és plana, aquest tipus de trencament indueix el mateix espectre de masses que prediuen els models amb trencament basat en el mecanisme de Scherk-Schwarz, amb la correspondència $\langle F_T \rangle/2 \leftrightarrow q_R$, on $\langle F_T \rangle$ és el valor esperat en el buit del camp auxiliar del radió i q_R la càrrega sota el grup d'automorfismes $\mathrm{SU}(2)_R$. Podem considerar, per tant, la formulació proposada en aquest treball com una descripció en supercamps del mecanisme de Scherk-Schwarz. Aquesta correspondència ens ha permès mostrar que el mecanisme de SS de trencament de supersimetria és espontani.

Hem considerat també escenaris amb la dimensió extra corbada *à la* Randall-Sundrum en els quals el trencament de supersimetria s'induïa a una de les parets de la dimensió extra corbada. Hem calculat l'espectre i hem observat que la massa del mode zero del gaugino pot ser de l'ordre del TeV, gràcies a la supressió exponencial deguda a la mètrica. Hem interpretat els resultats des del punt de vista d'una teoria conforme fortament acoblada en 4 dimensions, fent servir la correspondència AdS-CFT i hem mencionat per últim les semblances que presenta l'espectre amb el que prediuen els models amb trencament de supersimetria mediat per anomalies (AMSB).

Els resultats obtinguts en aquest treball poden ser útils per a estudiar la fenomenologia d'extensions supersimètriques de l'SM amb una dimensió extra plana o corbada, i obren el camí a formulacions anàlogues de supergravetat.

Apèndix A

Notació i convenis

Utilitzem la mètrica plana $\eta_{\mu\nu} = \mathrm{diag}(-1, +1, +1, +1)$, i fem servir la representació quiral de les matrius de Dirac:

$$\gamma^\mu = \mathrm{i}\begin{pmatrix} 0 & \sigma^\mu \\ \bar\sigma^\mu & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^5 = \gamma_5 = \mathrm{i}\gamma^0\gamma^1\gamma^2\gamma^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

amb $\sigma^\mu = (-1, \sigma^i)$ i $\bar\sigma^\mu = (-1, -\sigma^i)$, on σ^i són les matrius de Pauli. Les matrius de Dirac definides satisfan aleshores

$$\{\gamma_M, \gamma_N\} = \gamma_M\gamma_N + \gamma_N\gamma_M = 2\eta_{MN}, \quad \text{on} \quad \gamma_M = (\gamma_\mu, \gamma_5)\,.$$

L'spinor adjunt es defineix com $\bar\Psi \equiv \Psi^\dagger\gamma_0 = -\Psi^\dagger\gamma^0$.

Resulta convenient descomposar els spinors de 4 components habituals en dos spinors de Weyl de 2 components, cadascun dels quals té una quiralitat ben definida[1]:

$$\Psi \equiv \begin{pmatrix} \xi_\alpha \\ \bar\chi^{\dot\alpha} \end{pmatrix}, \quad \text{on} \quad \bar\chi^{\dot\alpha} \equiv \left(\chi^\alpha\right)^*.$$

Els índexs fermiònics s'apugen i s'abaixen fent ús del tensor antisimètric ϵ:

$$\begin{gathered}
\epsilon^{12} = -\epsilon^{21} = 1, \quad \epsilon_{21} = -\epsilon_{12} = 1\,, \\
\epsilon_{11} = \epsilon_{22} = \epsilon^{11} = \epsilon^{22} = 0\,, \\
\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\beta\gamma} = \delta_\alpha^\delta, \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon^{\dot\beta\dot\gamma} = \delta_{\dot\alpha}^{\dot\gamma}\,, \\
\xi^\alpha \equiv \epsilon^{\alpha\beta}\xi_\alpha, \qquad \bar\chi_{\dot\alpha} \equiv \epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta}\,, \\
\bar\sigma^{\mu\,\dot\alpha\alpha} = \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\epsilon^{\alpha\beta}\sigma^\mu_{\beta\dot\beta}\,.
\end{gathered}$$

[1]Els convenis per als índexs de Weyl són els de Wess i Bagger [50].

El conveni de suma sobre índexs fermiònics per a escalars Lorentz és

$$\begin{aligned}
\xi\chi &\equiv \xi^\alpha\chi_\alpha = -\xi_\alpha\chi^\alpha = \chi^\alpha\xi_\alpha = \chi\xi\,,\\
\bar\xi\bar\chi &\equiv \bar\xi_{\dot\alpha}\bar\chi^{\dot\alpha} = -\bar\xi^{\dot\alpha}\bar\chi_{\dot\alpha} = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\xi\,,\\
\big(\xi\chi\big)^\dagger &= \big(\xi^\alpha\chi_\alpha\big)^\dagger = \bar\chi_{\dot\alpha}\bar\xi^{\dot\alpha} = \bar\chi\bar\xi\,.
\end{aligned}$$

mentre que per als vectors Lorentz,

$$\begin{aligned}
\xi\sigma^\mu\bar\chi = \xi^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta}\bar\chi^{\dot\beta} &= -\bar\chi_{\dot\beta}\bar\sigma^{\mu\,\dot\beta\alpha}\xi_\alpha = -\bar\chi\bar\sigma^\mu\xi\,,\\
\big(\xi\sigma^\mu\bar\chi\big)^\dagger &= \chi\sigma^\mu\xi\,.
\end{aligned}$$

L'adjunt de l'spinor Ψ de 4 components ve donat per

$$\bar\Psi = \Psi^\dagger\gamma_0 = \mathrm{i}\begin{pmatrix}(\bar\chi^{\dot\alpha})^* & (\xi_\alpha)^*\end{pmatrix} = \mathrm{i}\begin{pmatrix}\chi^\alpha & \bar\xi_{\dot\alpha}\end{pmatrix}\,.$$

La matriu de conjugació de càrrega C, definida per la condició $C^{-1}\gamma^M C = -\gamma^{M\,T}$, és antisimètrica i es pot escollir unitària:

$$C = \begin{pmatrix}\epsilon_{\alpha\beta} & 0\\ 0 & \epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\end{pmatrix}\,,\quad C^T = -C,\ C^\dagger C = 1\,.$$

També són útils les relacions

$$\begin{aligned}
\theta^\alpha\theta^\beta = -\frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta}\theta\theta\,,\qquad & \theta_\alpha\theta_\beta = \frac{1}{2}\epsilon_{\alpha\beta}\theta\theta\,,\\
\bar\theta^{\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta\,,\qquad & \bar\theta_{\dot\alpha}\bar\theta_{\dot\beta} = -\frac{1}{2}\epsilon_{\dot\alpha\dot\beta}\bar\theta\bar\theta\,,\\
\theta\sigma^\mu\bar\theta\,\theta\sigma^\nu\bar\theta &= -\frac{1}{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\,\eta^{\mu\nu}\,,\\
\theta\xi\,\theta\chi \equiv (\theta\xi)(\theta\chi) &= -\frac{1}{2}(\xi\chi)(\theta\theta) = -\frac{1}{2}\xi\chi\,\theta\theta,\\
\bar\theta\bar\xi\,\bar\theta\bar\chi \equiv (\bar\theta\bar\xi)(\bar\theta\bar\chi) &= -\frac{1}{2}(\bar\xi\bar\chi)(\bar\theta\bar\theta) = -\frac{1}{2}\bar\xi\bar\chi\,\bar\theta\bar\theta\,.
\end{aligned}$$

Apèndix B

Supercamps

Així com per a formular una simetria com ara una rotació és imprescindible introduir un sistema de coordenades per tal de distingir entre les diferents direccions en l'espai, en supersimetria és útil introduir dues noves coordenades, que denotarem per θ i $\bar{\theta}$, per a distingir entre bosons i fermions. La idea és estendre la concepció dels quadrimoments P_μ com a generadors de translacions de les coordenades ordinàries de l'espaitemps x^μ als generadors fermiònics de l'àlgebra de Poincaré supersimetritzada (la *super-àlgebra* de Poincaré). Concretament, podem interpretar els generadors fermiònics Q_α i $\bar{Q}_{\dot{\alpha}}$ [1] de l'àlgebra supersimètrica com els generadors de translacions de les coordenades fermiòniques θ i $\bar{\theta}$ del *superespai*. Aquestes noves coordenades són spinors (de Weyl) i anticommuten entre elles i amb els camps fermiònics, però commuten amb els camps bosònics i amb les coordenades x^μ. Els números que anticommuten amb ells mateixos reben el nom de números de Grassmann.

B.1 La super-àlgebra de Poincaré $N = 1$

En primer lloc, atès que Q_α és un spinor de Weyl, les seves propietats de transformació respecte el grup de Poincaré ja vénen determinades. A partir de la identitat de Jacobi

$$\big[P^\mu, [P^\nu, Q_\alpha]\big] + \big[P^\nu, [Q_\alpha, P^\mu]\big] + \big[Q_\alpha, [P^\mu, P^\nu]\big] = 0$$

i recordant que $[P^\mu, P^\nu] = 0$, es pot deduir el commutador de P^μ i Q_α. Només cal tenir present que $[P^\nu, Q_\alpha]$ és un spinor i que ha de tenir l'estructura d'índexs correcta:

$$[P^\mu, Q_\alpha] = C\sigma^\mu_{\alpha\dot{\beta}}\bar{Q}^{\dot{\beta}}\,,\ \text{amb } \bar{Q}^{\dot{\beta}} = (Q^\beta)^* \Longrightarrow [P^\mu, \bar{Q}^{\dot{\beta}}] = -C^*(\bar{\sigma}^\mu)^{\dot{\beta}\gamma}Q_\gamma\,, \qquad \text{(B.1)}$$

[1] Fem servir notació 2-dimensional amb els convenis de Wess i Bagger [50].

on C és una constant que cal determinar. Es comprova sense massa dificultat que $C = 0$ i que per tant

$$[P^\nu, Q_\alpha] = 0 \qquad \big(\Longrightarrow [P^\nu, \bar{Q}_{\dot\alpha}] = 0\big)\,. \tag{B.2}$$

Seguint arguments similars es poden determinar les relacions de commutació entre el generador de les transformacions de Lorentz $M^{\mu\nu}$ i els generadors Q_α i $\bar{Q}_{\dot\alpha}$:

$$[M^{\mu\nu}, Q_\alpha] = -\mathrm{i}(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} Q_\beta\,,$$

que no fan més que evidenciar el caràcter spinorial dels generadors fermiònics.

Per tal de tancar l'àlgebra hem d'especificar els anticommutadors $\{Q_\alpha, Q_\beta\}$ i $\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\}$. El resultats d'aquests anticommutadors han de ser bosònics i per tant hauran de ser una combinació lineal de P^μ i $M^{\mu\nu}$. La covariància Lorentz redueix les múltiples possibilitats a només

$$\{Q_\alpha, Q^\beta\} = D\,(\sigma^{\mu\nu})_\alpha^{\ \beta} M_{\mu\nu}\,, \tag{B.3}$$

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = E\,\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu\,, \tag{B.4}$$

on D i E són constants a determinar. Com que els generadors fermiònics Q_α i $\bar{Q}^{\dot\beta}$ commuten tots ells amb P_μ, els anticommutadors (B.3)–(B.4) també commutaran amb P_μ. D'aquí se segueix que $D = 0$ i que per tant

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar{Q}_{\dot\alpha}, \bar{Q}_{\dot\beta}\} = 0\,. \tag{B.5}$$

El coeficient E, en canvi, no resta determinat i se sol fixar convencionalment a 2

$$\{Q_\alpha, \bar{Q}^{\dot\beta}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\beta} P_\mu\,. \tag{B.6}$$

B.2 Supercamp escalar general

Podem representar un multiplet de supersimetria (un *supermultiplet*), que conté camps bosònics i fermiònics, en un únic *supercamp* Φ definit en el superespai. Aquest supercamp ve parametritzat per les coordenades $z = z(x^\mu, \theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})$. Com que θ i $\bar\theta$ són números de Grassmann, el desenvolupament en sèrie de potències de θ i $\bar\theta$ del supercamp Φ acaba per força a ordre $\theta^2\bar\theta^2$ [2]:

$$\begin{aligned}\Phi(x,\theta,\bar\theta) = f(x) + \theta\varphi(x) + \bar\theta\bar\chi(x) + \theta\theta\, m(x) + \bar\theta\bar\theta\, n(x) + \theta\sigma^\mu\bar\theta\, v_\mu(x)\\ + \theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda(x) + \bar\theta\bar\theta\,\theta\psi(x) + \theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\, d(x).\end{aligned} \tag{B.7}$$

Els coeficients (complexos) d'aquest desenvolupament són els *camps components* que constitueixen el multiplet supersimètric.

[2] Recordem que $\theta\theta \equiv \theta^\alpha\theta_\alpha = \epsilon^{\alpha\beta}\theta_\beta\theta_\alpha$, on $\alpha, \beta = 1, 2$ etiqueten la component de l'spinor de Weyl.

A partir de l'àlgebra supersimètrica podem obtenir l'element general del grup de super-Poincaré exponenciant

$$\mathcal{G}(x^\mu, \theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha}, \omega^{\mu\nu}) = \exp\big[\mathrm{i}(-x^\mu P_\mu + \theta^\alpha Q_\alpha + \bar\theta_{\dot\alpha}\bar Q^{\dot\alpha})\big] \exp\big(-\frac{\mathrm{i}}{2}\omega^{\mu\nu}M_{\mu\nu}\big)\,. \tag{B.8}$$

De (B.8) veiem que $(x^\mu, \theta^\alpha, \bar\theta_{\dot\alpha})$ parametritza el grup $N = 1$ super-Poincaré mòdul grup de Lorentz[3]. Podem pensar en el superespai ($N = 1$) com precisament aquest grup quocient. El superespai té $4_B + 4_F$ dimensions.

Podem generar transformacions supersimètriques fent una translació exclusivament fermiònica, amb paràmetres $(0, \xi^\alpha, \bar\xi_{\dot\alpha})$, en el superespai (ometem els índexs fermiònics):

$$\begin{aligned}\exp\big[\mathrm{i}(\xi Q + \bar\xi\bar Q)\big]\exp\big[\mathrm{i}(-x^\mu P_\mu + \theta Q + \bar\theta\bar Q)\big] &\equiv G(0, \bar\xi, \xi)G(x^\mu, \theta, \bar\theta)\\ &= G(x^\mu + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar\xi - \mathrm{i}\xi\sigma^\mu\bar\theta, \theta + \xi, \bar\theta + \bar\xi)\,,\end{aligned} \tag{B.9}$$

on hem fet ús de la fórmula de Baker-Hausdorff-Campbell i de les relacions de l'àlgebra supersimètrica (B.5) i (B.6)

$$\{Q_\alpha, \bar Q_{\dot\alpha}\} = 2\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}P_\mu \implies [\xi Q, \bar\theta\bar Q] = 2\xi\sigma^\mu\bar\theta\, P_\mu\,, \tag{B.10}$$

$$\{Q_\alpha, Q_\beta\} = \{\bar Q_{\dot\alpha}, \bar Q_{\dot\alpha}\} = [Q_\alpha, P_\mu] = [\bar Q_{\dot\alpha}, P_\mu] = 0\,. \tag{B.11}$$

Del darrer membre de (B.9) notem que podem realitzar Q i $\bar Q$ com a operadors diferencials del superespai:

$$Q_\alpha:\ \partial_\alpha - \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \tag{B.12}$$

$$\bar Q_{\dot\alpha}:\ \bar\partial_{\dot\alpha} - \mathrm{i}\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,. \tag{B.13}$$

Ara és senzill calcular la variació infinitesimal del supercamp (B.7) sota una transformació supersimètrica $N = 1$ (ometem els índexs fermiònics)

$$\begin{aligned}\delta_\xi\Phi(x, \theta, \bar\theta) &= (\xi Q + \bar\xi\bar Q)\Phi(x, \theta, \bar\theta)\\ &= \big[\xi\varphi(x) + \bar\xi\bar\chi(x)\big] + \theta\big[2\xi m(x) + \sigma^\mu\bar\xi\big(\mathrm{i}\partial_\mu f(x) + v_\mu(x)\big)\big]\\ &\quad + \cdots + \theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\,\frac{\mathrm{i}}{2}\partial_\mu\big[\psi(x)\sigma^\mu\bar\xi - \xi\sigma^\mu\bar\lambda(x)\big]\\ &\equiv \delta_\xi f(x) + \theta\delta_\xi\varphi(x) + \cdots + \theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\,\delta_\xi d(x).\end{aligned} \tag{B.14}$$

El supercamp Φ rep el nom de *supercamp escalar general*. Convé remarcar que la component $\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta$ del supercamp Φ, el camp component escalar i complex $d(x)$, és modificat per una derivada total sota una transformació de supersimetria. Aquesta

[3]De la mateixa manera, podem pensar que les coordenades x^μ de l'espaitemps usual parametritzen el grup de Poincaré mòdul grup de Lorentz.

propietat permet construir trivialment lagrangians supersimètrics a partir d'un supercamp escalar general:

$$\delta_\xi \int \mathrm{d}^4x\, \Phi\Big|_{\text{comp. } \theta^2\bar\theta^2} = \delta_\xi \int \mathrm{d}^4x \int \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\bar\theta\ \Phi(x,\theta,\bar\theta) = \delta_\xi \int \mathrm{d}^4x\, d(x) = 0\,. \tag{B.15}$$

Es verifica fàcilment que una combinació lineal de supercamps escalars generals és també un supercamp escalar general. El mateix és cert per al producte i per a derivades respecte l'espaitemps de supercamps escalars generals. El supercamp Φ constitueix una base per a una representació lineal de la supersimetria $N = 1$. Malgrat tot, aquesta representació és reductible.

És un fet plausible, si bé no gens trivial de demostrar, que els supercamps que defineixen representacions irreductibles lineals de la supersimetria es poden sempre obtenir imposant lligams supersimètrics —és a dir, invariants sota les transformacions de supersimetria. Aquests lligams han de reduir el contingut dels supercamps sense restringir-ne la dependència en x^μ. Podem establir aquest tipus de lligams amb l'ajut de les derivades covariants

$$D_\alpha = \partial_\alpha + \mathrm{i}\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\bar\theta^{\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \tag{B.16}$$

$$\bar D_{\dot\alpha} = -\bar\partial_{\dot\alpha} - \mathrm{i}\theta^\alpha\sigma^\mu_{\alpha\dot\alpha}\,\partial_\mu\,, \tag{B.17}$$

les quals anticommuten amb els operadors diferencials (B.12)–(B.13). D'aquesta manera objectes com ara $D_\alpha\Phi$ i $\bar D_{\dot\alpha}\Phi$ són també supercamps escalars generals, en el sentit que transformen com a tals.

B.3 Supercamps quirals i antiquirals

El supercamp *quiral* (també anomenat supercamp *left-handed*) Q s'obté en imposar el lligam $\bar D_{\dot\alpha}Q = 0$ sobre un supercamp escalar general. La solució general de $\bar D_{\dot\alpha}Q = 0$ és un supercamp que depèn només de θ i de $y_\mu \equiv x_\mu - \mathrm{i}\theta\sigma_\mu\bar\theta$ (ja que $\bar D_{\dot\alpha}\theta = \bar D_{\dot\alpha}y = 0$) i.e., $Q = Q(y,\theta)$. Fent el desenvolupament de Q en sèrie de potències de θ obtenim

$$\begin{aligned} Q(y,\theta) &= A(y) + \sqrt{2}\theta\psi(y) + \theta\theta\, F(y) \\ &= A(x) + \mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar\theta\,\partial_\mu A(x) + \frac{1}{4}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\,\Box A(x) \\ &\quad + \sqrt{2}\theta\psi(x) - \frac{\mathrm{i}}{\sqrt{2}}\theta\theta\,\partial_\mu\psi(x)\sigma^\mu\bar\theta + \theta\theta\, F(x)\,, \end{aligned} \tag{B.18}$$

on $A(x)$ i $F(x)$ són camps escalars complexos i $\psi^\alpha(x)$ és un spinor de Weyl *left-handed* complex. Seguint el mateix procediment que a (B.14) podem trobar les transformacions supersimètriques explícites per al supercamp quiral Q. En particular es comprova que el camp component $F(x)$ transforma en una derivada total.

Per tant, la component $\theta\theta$ del supercamp quiral Q és un candidat per a construir lagrangians supersimètrics. Convé destacar també que la suma o producte de supercamps quirals és també un supercamp quiral:

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(Q_1 + Q_2) = \bar{D}_{\dot{\alpha}}Q_1 + \bar{D}_{\dot{\alpha}}Q_2 = 0\,, \tag{B.19}$$

$$\bar{D}_{\dot{\alpha}}(Q_1 Q_2) = (\bar{D}_{\dot{\alpha}}Q_1)Q_2 + Q_1(\bar{D}_{\dot{\alpha}}Q_2) = 0\,. \tag{B.20}$$

Semblantment, si Q és un supercamp quiral, el supercamp *antiquiral* $Q^\dagger$ (o supercamp quiral *right-handed*) satisfà la condició $D_\alpha Q^\dagger = 0$, de la qual es dedueix que $Q^\dagger$ és funció només de $\bar{\theta}$ i de $y^\dagger_\mu \equiv x_\mu + \mathrm{i}\theta\sigma_\mu\bar{\theta}$.

$$Q^\dagger(y^\dagger, \theta) = A^*(y^\dagger) + \sqrt{2}\bar{\theta}\bar{\psi}(y^\dagger) + \bar{\theta}\bar{\theta}\,F^*(y^\dagger)\,. \tag{B.21}$$

Es pot comprovar fàcilment que la component $\bar{\theta}\bar{\theta}$ del supercamp antiquiral $Q^\dagger$ transforma en una derivada total. Com en el cas quiral, la suma o producte de supercamps antiquirals és un supercamp antiquiral. El producte d'un supercamp quiral Q amb un d'antiquiral $Q^\dagger$, en canvi, no és ni un supercamp quiral ni un d'antiquiral, sinó un supercamp escalar general. La suma $Q + Q^\dagger$ no és tampoc quiral ni antiquiral, sinó que pertany a una nova representació irreductible, la del supercamp vector, que descrivim a la secció B.4.

B.3.1 Lagrangians supersimètrics amb supercamps quirals

Donats diferents supercamps quirals $Q_i, Q_j \ldots$ podem construir un invariant supersimètric a partir d'una combinació lineal de

$$\int \mathrm{d}^4x\, Q_i\big|_{\theta\theta},\ \int \mathrm{d}^4x\, Q_iQ_j\big|_{\theta\theta},\ \int \mathrm{d}^4x\, Q_iQ_jQ_k\big|_{\theta\theta}\ \cdots \tag{B.22}$$

on el símbol '$|_{\theta\theta}$' indica la component $\theta\theta$ del supercamp. Qualsevol combinació lineal d'aquest tipus rep el nom de *superpotencial*[4]. El superpotencial conté les interaccions entre els diferents membres dels supermultiplets quirals. Atès que el lagrangià ha de ser hermític, el superpotencial sempre anirà acompanyat del seu hermític conjugat, el qual contindrà termes de la forma

$$\int \mathrm{d}^4x\, Q_i^\dagger\big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}},\ \int \mathrm{d}^4x\, Q_i^\dagger Q_j^\dagger\big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}},\ \int \mathrm{d}^4x\, Q_i^\dagger Q_j^\dagger Q_k^\dagger\big|_{\bar{\theta}\bar{\theta}}\ \cdots \tag{B.23}$$

Es pot comprovar que els termes cinètics dels diferents camps components del supercamp quiral s'obtenen a partir del supercamp escalar general $Q_i^\dagger Q_i$:

$$\sum_i \int \mathrm{d}^4x\, Q_i^\dagger Q_i\big|_{\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}} = \sum_i \int \mathrm{d}^4x \left\{ F_i^* F_i + A_i^* \Box A_i + \mathrm{i}\partial_\mu \bar{\psi}_i \bar{\sigma}^\mu \psi_i \right\}, \tag{B.24}$$

acció que, per tractar-se de la component $\theta\theta\bar{\theta}\bar{\theta}$ d'un supercamp escalar general, és invariant supersimètrica.

[4] Sovint es restringeix el concepte de superpotencial a només aquelles c.l. que involucren com a màxim potències terceres de supercamps quirals, per tal d'obtenir lagrangians renormalitzables.

B.4 Supercamp vector

El supercamp vector V es defineix a partir del supercamp escalar general imposant el lligam de realitat $V(x,\theta,\bar\theta) = V^\dagger(x,\theta,\bar\theta)$. Resulta convenient escriure l'expressió més general possible del supercamp vector com:

$$\begin{aligned} V(x,\theta,\bar\theta) = {} & C(x) + \mathrm{i}\theta\xi(x) - \mathrm{i}\bar\theta\bar\xi(x) \\ & + \frac{\mathrm{i}}{2}\theta\theta[M(x)+\mathrm{i}N(x)] - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\theta\bar\theta[M(x)-\mathrm{i}N(x)] - \theta\sigma^\mu\bar\theta\, v_\mu \\ & + \mathrm{i}\theta\theta\,\bar\theta\big[\bar\lambda(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar\sigma^\mu\partial_\mu\xi(x)\big] - \mathrm{i}\bar\theta\bar\theta\,\theta\big[\lambda(x) + \frac{\mathrm{i}}{2}\sigma^\mu\partial_\mu\bar\xi(x)\big] \\ & + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\big[D(x) + \frac{1}{2}\Box C(x)\big]\,. \end{aligned} \tag{B.25}$$

Els camps C,D,M,N i v_μ són tots reals. Donat que el supercamp vector conté un camp vectorial v_μ real, és raonable pretendre construir teories gauge supersimètriques amb el supercamp vector V. Abans, però, cal deduir la generalització en supercamps de les transformacions de gauge.

B.4.1 Transformacions de supergauge

Si Φ és un supercamp quiral, $\Phi + \Phi^\dagger$ constitueix un cas especial de supercamp vector. El seu desenvolupament en components conté el terme $\mathrm{i}\theta\sigma^\mu\bar\theta\,\partial_\mu(A - A^*) \equiv \theta\sigma^\mu\bar\theta\,\partial_\mu\Lambda$, on Λ és un camp escalar real. D'aquí veiem que podem definir una transformació de gauge abeliana en supercamps com

$$V \longrightarrow V + \Phi + \Phi^\dagger \qquad \text{(transf. de supergauge)}\,, \tag{B.26}$$

ja que aquesta definició inclou la transformació correcta per al camp vectorial: $v_\mu \longrightarrow v_\mu + \partial_\mu\Lambda$. Si construïm accions invariants sota una transformació de supergauge, podem fer ús de la llibertat per a escollir $\Phi + \Phi^\dagger$ en la transformació (B.26) per a descomposar qualsevol supercamp vector com $V = V_{\mathrm{WZ}} + \Phi + \Phi^\dagger$, on

$$V_{\mathrm{WZ}} = -\theta\sigma^\mu\bar\theta v^\mu + \mathrm{i}\theta\theta\,\bar\theta\bar\lambda(x) - \mathrm{i}\bar\theta\bar\theta\,\theta\lambda(x) + \frac{1}{2}\theta\theta\,\bar\theta\bar\theta\,D(x)\,. \tag{B.27}$$

Aquesta és la forma del supercamp vector en l'anomenat gauge de Wess-Zumino (WZ). El gauge WZ no és supersimètric i deixa la llibertat de gauge residual $v_\mu \to v_\mu - \mathrm{i}\partial_\mu(A - A^*)$.

Els termes cinètics per als camps components de V han de ser invariants gauge i supersimètrics. Es poden obtenir a partir de

$$\int \mathrm{d}^4x\, W^\alpha W_\alpha\big|_{\theta\theta}\,, \quad \text{on } W_\alpha \equiv -\frac{1}{4}\bar D\bar D D_\alpha V\,. \tag{B.28}$$

Per definició, W_θ és un supercamp quiral ($\bar D_{\dot\beta} W_\alpha = 0$) invariant sota transformacions de supergauge.

Apèndix C

Càlculs explícits

C.1 Supermultiplet vectorial en presència del terme F del radió

En aquesta secció descomposarem l'acció ensupercamps (3.7) en components, realitzarem la integració sobre el superespai i exliminarem els camps auxiliars per acabar obtenint l'acció supersimètrica 5-dimensional (3.9). Considerarem un valor esperat no nul per a F_T.

L'acció que proposem per a una teoria gauge abeliana és:

$$S = \int \mathrm{d}^5x \left\{ \frac{1}{4g^2} \int \mathrm{d}^2\theta \, T \, W^\alpha W_\alpha + \text{h.c.} \right.$$
$$\left. + \frac{2}{g^2} \int \mathrm{d}^2\theta \, \mathrm{d}^2\bar{\theta} \, \frac{1}{(T + T^\dagger)} \Big(\partial_5 V - \frac{1}{\sqrt{2}} (\chi + \chi^\dagger) \Big)^2 \right\}, \quad \text{(C.1)}$$

on els supercamps vénen donats per

$$T = R + \mathrm{i}B_5 + \theta \Psi_R^5 + \theta^2 F_T \,, \quad \text{(C.2)}$$
$$V = -\theta\sigma^\mu\bar{\theta} A_\mu + \mathrm{i}\bar{\theta}^2\theta\lambda_1 - \mathrm{i}\theta^2\bar{\theta}\bar{\lambda}_1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}^2\theta^2 D \,, \quad \text{(C.3)}$$
$$\chi = \frac{1}{\sqrt{2}}(\Sigma + \mathrm{i}A_5) + \sqrt{2}\theta\lambda_2 + \theta^2 F_\chi \,. \quad \text{(C.4)}$$

Desenvolupant el segon terme de (C.1) tenint en compte les definicions dels supercamps T, V i χ obtenim

$$\begin{aligned}\left(\partial_5 V - \frac{1}{\sqrt{2}}(\chi + \chi^\dagger)\right)^2 = \Big(& -\frac{1}{2}\partial_5 A_\mu \partial_5 A^\mu + \frac{1}{2}\Sigma\Box\Sigma - \frac{\mathrm{i}}{2}\lambda_2\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}_2 - \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\lambda}_2\bar{\sigma}^\mu\partial_\mu\lambda_2 \\ & + F_\chi F_\chi^\dagger - \frac{1}{2}\partial_\mu A_5 \partial^\mu A_5 \\ & + \partial_5 A_\mu \partial^\mu A_5 + \mathrm{i}\lambda_2\partial_5\lambda_1 - \mathrm{i}\bar{\lambda}_2\partial_5\bar{\lambda}_5 - \Sigma\partial_5 D\Big)\bar{\theta}^2\theta^2 \\ + & \left(\sqrt{2}\Sigma F_\chi - \frac{1}{2}\lambda_2\lambda_2\right)\theta^2 + \text{ h.c } + \cdots + \Sigma^2 \,. \end{aligned} \tag{C.5}$$

on els punts suspensius fan referència a termes lineals en θ i $\bar{\theta}$, que no jugaran cap paper en el trencament de supersimetria. L'expansió en components del factor $(T+T^\dagger)^{-1}$ s'obté a partir del seu desenvolupament en sèrie de potències de θ i $\bar{\theta}$:

$$\frac{1}{T+T^\dagger} = \frac{1}{2R} - \frac{1}{(2R)^2}\big(\theta\Psi_R^5 + \bar{\theta}\bar{\Psi}_R^5 + \theta^2 F_T + \bar{\theta}^2 F_T\big) + \frac{1}{(2R)^3}\big(2\,\theta^2\bar{\theta}^2\,|F_T|^2 + \cdots\big)\,.$$

Si ignorem tots els termes que no contenen R ni F_T, l'equació (C.1) pren la forma següent:

$$\begin{aligned} S = \int \mathrm{d}^5x \Big\{ & R\Big(\frac{1}{2}D^2 - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \mathrm{i}\lambda_1\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}_1\Big) - \frac{F_T}{4}(\lambda_1\lambda_1 + \bar{\lambda}_1\bar{\lambda}_1) \\ + \frac{1}{R}\Big(& D\partial_5\Sigma - \frac{1}{2}\partial_\mu\Sigma\partial^\mu\Sigma + \mathrm{i}\lambda_2\partial_5\lambda_1 - \mathrm{i}\bar{\lambda}_2\partial_5\bar{\lambda}_1 - \mathrm{i}\lambda_2\sigma^\mu\partial_\mu\bar{\lambda}_2 - \frac{2}{4}F_{\mu 5}F^{\mu 5} + F_\chi F_\chi^\dagger\Big) \\ & + \frac{1}{4R^2}F_T\big(\lambda_2\lambda_2 + \bar{\lambda}_2\bar{\lambda}_2\big) - \frac{1}{\sqrt{2}R^2}F_T(F_\chi + F_\chi^\dagger)\Sigma + \frac{1}{2R^3}|F_T|^2\Sigma^2\Big\}. \end{aligned} \tag{C.6}$$

Després d'eliminar els camps auxiliars amb l'ajut de les equacions del moviment i reescalant els camps com

$$A^\mu \to A^\mu, \qquad \Sigma \to R\Sigma, \qquad \lambda_1 \to \lambda_1, \qquad \lambda_2 \to \mathrm{i}R\lambda_2 \quad ,$$

l'expressió (C.6) és ara, definint $\big[\boldsymbol{\lambda}^i\big]^T \equiv (\lambda^i_\alpha, \epsilon^{ij}\bar{\lambda}^{\dot{\alpha}}_j)$,

$$S = \int \mathrm{d}^5x\, R\left[-\frac{1}{2}\partial_M\Sigma\partial^M\Sigma - \frac{1}{4}F_{MN}F^{MN} + \frac{\mathrm{i}}{2}\bar{\boldsymbol{\lambda}}^i\gamma^M\partial_M\boldsymbol{\lambda}^i + \frac{1}{2}\frac{F_T}{2R}\,\boldsymbol{\lambda}_i^T C\boldsymbol{\lambda}^i\right], \tag{C.7}$$

on C és la matriu de conjugació de càrrega, definida a l'apèndix A.

C.2 Supermultiplet vectorial. Teoria gauge no abeliana.

En aquesta secció calculem en detall la invariància de l'acció en supercamps (3.10) sota les transformacions de gauge no abelianes (3.12).

Recordem que el supercamp quiral χ transforma sota la representació adjunta del grup de gauge. Si definim $U \equiv e^{-\Lambda}$, $U^\dagger \equiv e^{-\Lambda^\dagger}$ les transformacions de gauge són aleshores

$$\chi \longrightarrow U^{-1}(\chi - \sqrt{2}\partial_5)U\,, \qquad e^V \longrightarrow U^{-1}e^V U^{-1\,\dagger}\,, \tag{C.8}$$

$$\chi^\dagger \longrightarrow U^\dagger(\chi^\dagger + \sqrt{2}\partial_5)U^{-1\,\dagger}\,, \qquad e^{-V} \rightarrow U^\dagger e^{-V} U\,, \tag{C.9}$$

on $\chi \equiv \chi^a T^a$, $V \equiv V^a T^a$. Desenvolupant

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{d}^5x \Bigg\{ \frac{1}{4}\,\mathrm{Tr}\Big[\int \mathrm{d}^2\theta\, W^\alpha W_\alpha + \text{ h.c. }\Big] \\ + \mathrm{Tr}\Big[\int \mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{d}^2\bar\theta\,(\sqrt{2}\partial_5 + \chi^\dagger)e^{-V}(-\sqrt{2}\partial_5 + \chi)e^V + (\partial_5 e^{-V})(\partial_5 e^V) + \frac{1}{2}(\chi^2 + \chi^{\dagger\,2})\Big]\Bigg\} \\ \equiv S_a + S_b \end{aligned} \tag{C.10}$$

El primer terme S_a és naturalment invariant gauge. Per provar la invariància gauge del segon terme S_b escriurem (C.10) com

$$\begin{aligned} S_b = \frac{1}{g^2}\int \mathrm{d}^5x \int \mathrm{d}^2\theta\,\mathrm{d}^2\bar\theta \Bigg\{ \mathrm{Tr}\Big[-(\partial_5 e^{-V})(\partial_5 e^V) + \sqrt{2}\big(e^V\partial_5 e^{-V}\chi - e^{-V}\partial_5 e^V \chi^\dagger\big) \\ + \chi^\dagger e^{-V}\chi e^V + \frac{1}{2}(\chi^2 + \chi^{\dagger\,2})\Big]\Bigg\} \equiv S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \end{aligned} \tag{C.11}$$

Sota la transformació (C.9) tenim aleshores

$$\begin{aligned} S_1 = \int \mathrm{d}^4\theta\ \mathrm{Tr}\left[-\partial_5 e^{-V}\partial_5 e^V\right] \\ \longrightarrow \int \mathrm{d}^4\theta\ \mathrm{Tr}\Big[-\partial_5 e^{-V}\partial_5 e^V - 2\,U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}U(\partial_5 U^{-1})e^V \\ - 2\Big(U(\partial_5 U^{-1})e^V\partial_5 e^{-V} + U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}\partial_5 e^V\Big) \\ - (\partial_5 U)(\partial_5 U^{-1}) - (\partial_5 U^\dagger)(\partial_5 U^{-1\,\dagger})\Big]\ , \end{aligned} \tag{C.12}$$

$$\begin{aligned} S_2 = \int \mathrm{d}^4\theta\ \mathrm{Tr}\left[\sqrt{2}\big(e^V\partial_5 e^{-V}\chi - e^{-V}\partial_5 e^V\chi^\dagger\big)\right] \\ \longrightarrow \int \mathrm{d}^4\theta\ \mathrm{Tr}\Big[\sqrt{2}\big(e^V\partial_5 e^{-V}\chi - e^{-V}\partial_5 e^V\chi^\dagger\big) + -\big[U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}U(\partial_5 U^{-1})e^V\big] \\ + \sqrt{2}[(\partial_5 U)U^{-1}\chi - (\partial_5 U^{-1\,\dagger})U^\dagger\chi^\dagger] + \sqrt{2}[e^V U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}\chi - e^{-V}U(\partial_5 U^{-1})e^V\chi^\dagger\Big] \\ + 2\big[U(\partial_5 U^{-1})e^V\partial_5 e^{-V} + U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}(\partial_5 e^V)\big] \\ + 2\big[(\partial_5 U)(\partial_5 U^{-1}) + (\partial_5 U^\dagger)(\partial_5 U^{-1\,\dagger})\big]\ , \end{aligned} \tag{C.13}$$

$$
\begin{aligned}
S_3 = &\int \mathrm{d}^4\theta \ \mathrm{Tr}\Big[\chi^\dagger e^{-V}\chi e^V\Big] \\
\longrightarrow &\int \mathrm{d}^4\theta \ \mathrm{Tr}\Big[\chi^\dagger e^{-V}\chi e^V - \sqrt{2}\Big(e^V U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}\chi - e^{-V}U(\partial_5 U^{-1})e^V\chi^\dagger\Big)\big] \\
&\qquad\qquad - 2\big[U^{-1\,\dagger}(\partial_5 U^\dagger)e^{-V}U(\partial_5 U^{-1})e^V\big]\Big] \ , \qquad \text{(C.14)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
S_4 = &\int \mathrm{d}^4\theta \ \mathrm{Tr}\left[\frac{1}{2}(\chi^2 + \chi^{\dagger\,2})\right] \\
&\longrightarrow \int \mathrm{d}^4\theta \ \mathrm{Tr}\Big[\frac{1}{2}(\chi^2 + \chi^{\dagger\,2}) - \sqrt{2}\big[(\partial_5 U)U^{-1}\chi - (\partial_5 U^{-1\,\dagger})U^\dagger\chi^\dagger\big] \\
&\qquad\qquad - \big[(\partial_5 U)(\partial_5 U^{-1}) + (\partial_5 U^\dagger)(\partial_5 U^{-1\,\dagger})\big]\Big] \ , \qquad \text{(C.15)}
\end{aligned}
$$

on hem utilitzat repetidament la identitat $(\partial_5 U)U^{-1} = -U(\partial_5 U^{-1})$ i la propietat de ciclicitat de la traça. La invariància de (C.11) es comprova ara fàcilment només sumant (C.12), (C.13), (C.14) i (C.15). Notem també que l'expressió (C.11) es pot rescriure de manera més compacta com:

$$
\int \mathrm{d}^2\theta\, \mathrm{d}^2\bar{\theta} \ \mathrm{Tr}\Big(\{e^{V/2}, \partial_5 e^{-V/2}\} + \frac{1}{\sqrt{2}}(e^{V/2}\chi^\dagger e^{-V/2} + e^{-V/2}\chi e^{V/2})\Big)^2 \ . \qquad \text{(C.16)}
$$

Per comprovar que (C.16) correspon a l'expressió (C.11) cal fer ús de la identitat $2e^{V/2}(\partial_5 e^{-V/2}) = e^V(\partial_5 e^{-V})$.

Bibliografia

[1] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "The hierarchy problem and new dimensions at a millimeter", Phys. Lett. **B429**, 263 (1998), [hep-ph/9803315].

[2] N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "Phenomenology, astrophysics and cosmology of theories with sub-millimeter dimensions and TeV scale quantum gravity", Phys. Rev. **D59**, 086004 (1999), [hep-ph/9807344].

[3] I. Antoniadis, N. Arkani-Hamed, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "New dimensions at a millimeter to a Fermi and superstrings at a TeV", Phys. Lett. **B436**, 257 (1998), [hep-ph/9804398].

[4] L. Randall and R. Sundrum, "A large mass hierarchy from a small extra dimension", Phys. Rev. Lett. **83**, 3370 (1999), [hep-ph/9905221].

[5] J. Scherk and J. H. Schwarz, "How to get masses from extra dimensions", Nucl. Phys. **B153**, 61 (1979).

[6] A. Salam and J. Strathdee, "Supergauge transformations", Nucl. Phys. **B76**, 477 (1974).

[7] M. T. Grisaru, W. Siegel and M. Roček, "Improved methods for supergraphs", Nucl. Phys. **B159**, 429 (1979).

[8] N. Marcus, A. Sagnotti and W. Siegel, "Ten-dimensional supersymmetric Yang-Mills theory in terms of four-dimensional superfields", Nucl. Phys. **B224**, 159 (1983).

[9] N. Arkani-Hamed, T. Gregoire and J. Wacker, "Higher dimensional supersymmetry in 4d superspace", JHEP **03**, 055 (2002), [hep-th/0101233].

[10] A. Pomarol and M. Quirós, "The Standard Model from extra dimensions", Phys. Lett. **B438**, 255 (1998), [hep-ph/9806263].

[11] I. Antoniadis, S. Dimopoulos, A. Pomarol and M. Quirós, "Soft masses in theories with supersymmetry breaking by TeV-compactification", Nucl. Phys. **B544**, 503 (1999), [hep-ph/9810410].

[12] A. Delgado, A. Pomarol and M. Quirós, "Supersymmetry and electroweak breaking from extra dimensions at the TeV-scale", Phys. Rev. **D60**, 095008 (1999), [hep-ph/9812489].

[13] R. Barbieri, L. J. Hall and Y. Nomura, "A constrained standard model from a compact extra dimension", Phys. Rev. **D63**, 105007 (2001), [hep-ph/0011311].

[14] M. A. Luty and R. Sundrum, "Radius stabilization and anomaly-mediated supersymmetry breaking", Phys. Rev. **D62**, 035008 (2000), [hep-th/9910202].

[15] E. A. Mirabelli and M. E. Peskin, "Transmission of supersymmetry breaking from a 4-dimensional boundary", Phys. Rev. **D58**, 065002 (1998), [hep-th/9712214].

[16] E. R. Sharpe, "Boundary superpotentials", Nucl. Phys. **B523**, 211 (1998), [hep-th/9611196].

[17] D. Martí and A. Pomarol, "Fayet-iliopoulos terms in 5d theories and their phenomenological implications", hep-ph/0205034.

[18] T. Gherghetta and A. Pomarol, "Bulk fields and supersymmetry in a slice of AdS", Nucl. Phys. **B586**, 141 (2000), [hep-ph/0003129].

[19] R. Altendorfer, J. Bagger and D. Nemeschansky, "Supersymmetric Randall-Sundrum scenario", Phys. Rev. **D63**, 125025 (2001), [hep-th/0003117].

[20] N. Alonso-Alberca, P. Meessen and T. Ortín, "Supersymmetric brane-worlds", Phys. Lett. **B482**, 400 (2000), [hep-th/0003248].

[21] A. Falkowski, Z. Lalak and S. Pokorski, "Supersymmetrizing branes with bulk in five-dimensional supergravity", Phys. Lett. **B491**, 172 (2000), [hep-th/0004093].

[22] E. Bergshoeff, R. Kallosh and A. Van Proeyen, "Supersymmetry in singular spaces", JHEP **10**, 033 (2000), [hep-th/0007044].

[23] S. Nojiri and S. D. Odintsov, "Supersymmetric new brane world", Phys. Rev. **D64**, 023502 (2001), [hep-th/0102032].

[24] H. Nishino and S. Rajpoot, "Alternative $N = 2$ supergravity in singular five dimensions with matter/gauge couplings", Nucl. Phys. **B612**, 98 (2001), [hep-th/0105138].

[25] T. Fujita, T. Kugo and K. Ohashi, "Off-shell formulation of supergravity on orbifold", Prog. Theor. Phys. **106**, 671 (2001), [hep-th/0106051].

[26] H. Davoudiasl, J. L. Hewett and T. G. Rizzo, "Bulk gauge fields in the Randall-Sundrum model", Phys. Lett. **B473**, 43 (2000), [hep-ph/9911262].

[27] A. Pomarol, "Gauge bosons in a five-dimensional theory with localized gravity", Phys. Lett. **B486**, 153 (2000), [hep-ph/9911294].

[28] A. Pomarol, "Grand unified theories without the desert", Phys. Rev. Lett. **85**, 4004 (2000), [hep-ph/0005293].

[29] E. Cremmer, S. Ferrara, C. Kounnas and D. V. Nanopoulos, "Naturally vanishing cosmological constant in $N = 1$ supergravity", Phys. Lett. **B133**, 61 (1983).

[30] S. Ferrara, C. Kounnas, M. Porrati and F. Zwirner, "Superstrings with spontaneously broken supersymmetry and their effective theories", Nucl. Phys. **B318**, 75 (1989).

[31] M. Porrati and F. Zwirner, "Supersymmetry breaking in string derived supergravities", Nucl. Phys. **B326**, 162 (1989).

[32] S. Ferrara, C. Kounnas and F. Zwirner, "Mass formulae and natural hierarchy in string effective supergravities", Nucl. Phys. **B429**, 589 (1994), [hep-th/9405188].

[33] E. Dudas and C. Grojean, "Four-dimensional M-theory and supersymmetry breaking", Nucl. Phys. **B507**, 553 (1997), [hep-th/9704177].

[34] E. Cremmer *et al.*, "Spontaneous symmetry breaking and higgs effect in supergravity without cosmological constant", Nucl. Phys. **B147**, 105 (1979).

[35] E. Cremmer, S. Ferrara, L. Girardello and A. Van Proeyen, "Yang-Mills theories with local supersymmetry: Lagrangian, transformation laws and superhiggs effect", Nucl. Phys. **B212**, 413 (1983).

[36] E. Pontón and E. Poppitz, "Casimir energy and radius stabilization in five and six dimensional orbifolds", JHEP **06**, 019 (2001), [hep-ph/0105021].

[37] I. Antoniadis, S. Dimopoulos and G. R. Dvali, "Millimeter range forces in superstring theories with weak- scale compactification", Nucl. Phys. **B516**, 70 (1998), [hep-ph/9710204].

[38] I. Antoniadis and M. Quirós, "On the M-theory description of gaugino condensation", Phys. Lett. **B416**, 327 (1998), [hep-th/9707208].

[39] N. Arkani-Hamed, L. J. Hall, Y. Nomura, D. R. Smith and N. Weiner, "Finite radiative electroweak symmetry breaking from the bulk", Nucl. Phys. **B605**, 81 (2001), [hep-ph/0102090].

[40] T. Gherghetta and A. Pomarol, "A warped supersymmetric Standard Model", Nucl. Phys. **B602**, 3 (2001), [hep-ph/0012378].

[41] A. Falkowski, Z. Lalak and S. Pokorski, "Four dimensional supergravities from five dimensional brane worlds", Nucl. Phys. **B613**, 189 (2001), [hep-th/0102145].

[42] S. Dimopoulos, S. Kachru, N. Kaloper, A. E. Lawrence and E. Silverstein, "Small numbers from tunneling between brane throats", Phys. Rev. **D64**, 121702 (2001), [hep-th/0104239].

[43] M. A. Luty and R. Sundrum, "Hierarchy stabilization in warped supersymmetry", Phys. Rev. **D64**, 065012 (2001), [hep-th/0012158].

[44] J. Bagger, D. Nemeschansky and R.-J. Zhang, "Supersymmetric radion in the Randall-Sundrum scenario", JHEP **08**, 057 (2001), [hep-th/0012163].

[45] J. M. Maldacena, "The large N limit of superconformal field theories and supergravity", Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998), [hep-th/9711200].

[46] S. S. Gubser, "AdS/CFT and gravity", Phys. Rev. **D63**, 084017 (2001), [hep-th/9912001].

[47] N. Arkani-Hamed, M. Porrati and L. Randall, "Holography and phenomenology", JHEP **08**, 017 (2001), [hep-th/0012148].

[48] R. Rattazzi and A. Zaffaroni, "Comments on the holographic picture of the Randall-Sundrum model", JHEP **04**, 021 (2001), [hep-th/0012248].

[49] M. Pérez-Victoria, "Randall-Sundrum models and the regularized AdS/CFT correspondence", JHEP **05**, 064 (2001), [hep-th/0105048].

[50] J. Bagger and J. Wess, *Supersymmetry and Supergravity* (Princeton University Press, 1992).