

耗散系统的混沌现象

汪小京

R. 费因曼曾经说过：物理学家若在本世纪内能够知道怎样描写抽烟的情形，将是一个很了不起的成就。亲爱的读者，您注意过有经验的“烟鬼”是怎样吐烟圈的吗？，您可曾想到用物理去解释，用数学来描述它的上升和变形？这个似乎“无聊”的问题涉及的实际上是一类被称作“湍流”的物理现象。这类现象在自然界中广泛存在着。您看（图1），卫星给地球大气层拍下的照片就是湍流的样子；飞机和轮船在流体（空气或水）中运动会造成很多不同大小的漩涡，通过粘性大量地消耗能量，也是湍流现象的效应。

湍流是流体的一种典型运动形式，除此以

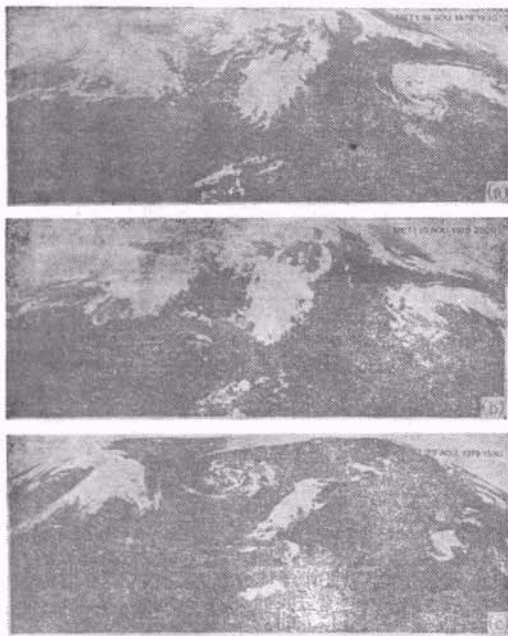


图1^[1] 为什么人们不能准确地预报一周以后的天气？尽管气象卫星给出了相当准确的风、云、温度的分布，可是由于气流的湍流特点，这“初始条件”上的任一小误差将随着时间的推移而不断放大，一定时间以后的分布变得与“初始条件”无关了

外，当然还有其它多种多样的形式。一个在重力和热梯度(温差)作用下的所谓“Bénard 流体层”，可以自发地出现(静止的或随时间变化的)对流结构，就是一个例子(见图2)。在这个领域里，尽管人们早在十九世纪就已经建立了流体力学的 Navier-Stokes 方程，可是长期以来，方程的非线性阻碍了人们对其解的认识。只是近十多年来，由于非线性数学、不可逆过程理论的进展，以及计算机模拟的广泛使用，对这些复杂现象的理论研究才迅速发展起来。

当外界物理条件改变时，流体的某种状态可能突然失稳，同时产生一个或几个新的稳定状态，这种突变的机制叫“分岔”（见图2）。复杂的物理状态可以通过分岔而诞生，“有序”可以通过分岔变得“混乱”。基于湍流在不同尺度上的“混乱”特点，L. 朗道曾在1944年设想，

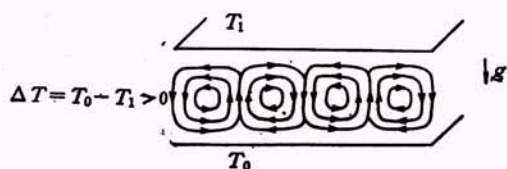


图2 Bénard 流体层：当 ΔT 很小时，热以传导的方式传递，流体无宏观运动。当 ΔT 超过某一临界值时，此态失稳，让位于新产生的宏观热对流状态，其空间结构依容器的几何形状不同，可呈卷筒状、圆形、六角形等

“无序”起因于一系列“振荡模”的叠加：周期循环是一种规则运动，由其频率表征，叫做一个“振荡模”。如果流体内部不断地有非共振的振荡模（通过分岔）被激发起来（见图3），这些模的叠加使得系统作越来越复杂的“准周期运动”，而湍流则是当模的个数趋向无穷大的情形。可是后来的研究发现，不同的频率之间常出现共振，造成所谓“锁频”现象，从而阻止新振荡模的“激发”。这表明多频率共存的情形可能

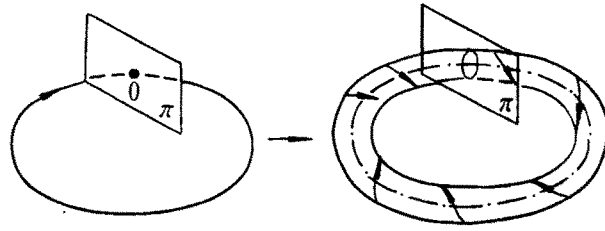


图3 从周期振荡(“极限环”)到准周期运动(“二维环面”)的分岔

性很小。事实上，所谓“无序”现象并不需要无穷多个自由度都起作用。1971年，法国学者 D. Ruelle 和 F. Takens^[2] 发表的工作表明，有一类动力系统，当有限维数(如三维)环面失稳时，系统可以具有一种被称为“奇怪吸引子”的复杂运动状态，而这个状态的“奇异”处之一，正在于它将初始条件上的极小误差无限地放大的特点(见图1)。Ruelle 和 Takens 的理论后来在流体实验里得到了证实^[3]。人们把这种具有少自由度的、时间上的无规现象叫作“混沌”(chaos)。

应当说明，上述状态的失稳和新组织的产生，远不只限于流体的范围。这类现象是通常所说的平衡相变在非平衡情况下的类比，在激光、弹性力学、非线性电路、等离子体、生物形态学和生态学模型等领域有深刻的意义。特别是 I. Prigogine 和他的同事们从热力学第二定律在非平衡条件下的一个推广出发，指出在化学动力学中，远离平衡的自催化反应也可有静均匀态的失稳，带来周期振荡或空间结构^[4,5]。实验上，人们在贝洛索夫-柴波廷斯基(Belousov-Zhabotinski)反应里不仅观察到了伴随着周期性颜色变化的振荡现象^[6]，而且后来也发现了混沌^[7]。

一、混沌行为的数学描述

既然混沌现象可以出现在少自由度的系统，为了简化起见，以下我们不再考虑空间的因素，因此物理系统由一常微分方程组来描述：

$$\frac{dx}{dt} = F(x, \mu), \quad x \in R^n \quad (1)$$

这里 (x_1, x_2, \dots, x_n) 是 n 个确定系统物理状态的

变量， μ 代表外界控制参数(如 Bénard 液体层的 ΔT)。 F 通常为非线性矢量场。根据初始条件的不同，(1)式的一个解在相空间 R^n 里划出一条运动轨迹。对于那些有耗能效应的耗散系统，从相空间某一小区域出发的所有轨迹，可以趋向同一个被称为“吸引子”的、体积为零的渐近状态。动力学系统的稳定性和分岔理论，就是关于渐近状态的稳定性及其突变的理论。

让我们来看一个混沌行为的具体模型。对描写滚筒形对流系统(图2)的偏微分方程在一定条件下作近似，可以得到下列方程：

$$\begin{cases} \dot{x} = -\sigma x + \sigma y, \\ \dot{y} = rx - y - xz, \\ \dot{z} = -bz + xy, \end{cases} \quad (2)$$

其中 x, y, z (无量纲傅里叶模的幅度)与流体的速度和温度相联系， σ, r 和 b 为系统的参数(通常取 $\sigma = 10, b = 8/3$)。 r 控制离开平衡态的程度：它的大小正比于温差 ΔT 。早在六十年代初，气象学家 E. Lorenz^[8] 用计算机对此模型进行了讨论，发现这个确定性方程的解可以具有“不可预测”的特征。不难证明，静态 $x = y = z = 0$ (代表热传导态)当 $r < 1$ 时是稳定的。当 r 增大至 1 时，(2)式的解发生分岔，超过 1 时热传导态让位于自发的滚筒形对流态。当 r 增加得更大 ($r > 24.7$) 时，系统的渐近态变得与时间有关。当 $r = 28$ 时，(2)式的数值解给出的 $z(t)$ 见图 4。

由图 4 我们看到， $z(t)$ 的一系列极大值的幅度和发生的时刻都似乎是无规的。可是由于(2)式是确定性的，极大值 z_{n+1} 由上一个极大值 z_n 确定。Lorenz 用数值法得到了这个函数 $z_{n+1} = f(z_n)$ (见图 5)。函数 f 的一大特点是

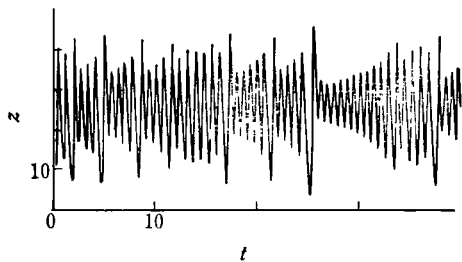


图4 固定 $b = 8/3$, $\sigma = 10$, $r = 28$ 时 $x(t)$ 的图象

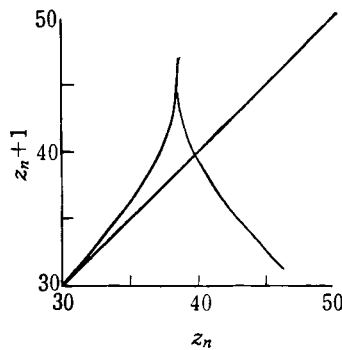


图5 图4中第 $n+1$ 个极大值是第 n 个的函数:
 $z_{n+1} = f(z_n)$

它在任何一点的导数的绝对值均大于1。如果两条轨迹的初始极值差为 δz_0 , 则 n 次振荡后, 两者的差 δz_n 近似由下式给出:

$$\delta z_n = \left| \frac{df}{dz}(z_{n-1}) \right| \cdot \left| \frac{df}{dz}(z_{n-2}) \right| \cdots \left| \frac{df}{dz}(z_0) \right| \delta z_0. \quad (3)$$

由于每个 $\left| \frac{df}{dz}(z_j) \right|$ 都大于1, δz_n 随着 n 无限地增大, 这正是对初始条件敏感的特点。

高维的问题往往可以归结为类似的低维映象。比如, 在 (x, y, z) 空间选择一个截面, 考虑(2)式的解的轨迹按一定方向穿过截面所得到的点, 我们就可得到一个定义在截面上的二维映象。由于分岔点附近的性质就象平衡相变点附近的性质一样, 具有普适规律, 对低维映象的研究可以较容易地寻找出产生混沌的分岔规律来。在下一节里, 我们将较具体地讨论一个生态学模型的例子。

物理

二、一个例子: 一维线段的非线性映象

假使某种没有世代交叠的昆虫, 第 n 代虫口数为 P_n 。如果 P_n 很小, 下一代的虫口数为

$$P_{n+1} = \lambda P_n = \lambda^n P.$$

$$(\lambda > 1 \text{ 代表增长比率}) \quad (4)$$

由于 P_n 不可能无限制地增长下去, λ 应当与 P_n 有关, 并且当 P_n 足够大时它趋于零。如果在(4)式中用 $\lambda - \alpha P_n$ 代替 λ , 并令 $P_n = (\lambda/\alpha) x_n$, 则有

$$x_{n+1} = g(x_n, \lambda) = \lambda x_n (1 - x_n). \quad (5)$$

函数 $g(x, \lambda)$ 在 $x = 0, 1$ 时为零, 在 $x = 1/2$ 点有一个可微分的极大值。以下我们只考虑区间 $[0, 1]$ 。

我们定义(5)式的“ k 点周期解”为 $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, 使得

$$x_{i+1} = g(x_i, \lambda) \quad (i = 1, \dots, k-1), \\ x_1 = g(x_k) = g^k(x_1). \quad (6)$$

其稳定性取决于 $\left| \prod_{i=1}^k \frac{dg(x_i)}{dx} \right|$ 是否大于1 [见(3)式]。不难看出, (5)式的静态解 ($k=1$) 有两个: $x_1^* = 0$, $x_2^* = 1 - \lambda^{-1}$ ($\lambda > 1$)。对(5)式求导数可知: $x_1^* = 0$ (昆虫灭绝) 在 $\lambda < 1$ 时是唯一的稳定态, 而当 $\lambda > \lambda_0 = 1$ 时失稳, x_2^* 诞生。当 $\lambda > \lambda_1 = 3$ 时, x_2^* 也失稳了。可是如果我们看看函数 $g^2 = g \circ g$, 就会发现, 正好在 $\lambda_1 = 3$ 点, 一个稳定的2周期解产生了(图6)。事实上, 当 λ 不断增大并逐个穿过分岔点 λ_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) 时, 2^{k-1} 周期解依次失稳, 让位于 2^k 周期解。这一系列分岔叫做“倍周期分岔”。

1978年, 美国学者 M. J. Feigenbaum^[9] 发现, 序列 $\{\lambda_1, \lambda_2, \dots\}$ 趋向一定值 $\lambda_\infty (= 3.569945\dots)$, 其方式满足

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\lambda_{k+1} - \lambda_k}{\lambda_{k+2} - \lambda_{k+1}} = \delta = 4.66920\dots \quad (7)$$

他用重整化群的方法, 证明这个数值仅与函数 δ 的定性性质有关, 因此具有普适性。后来,

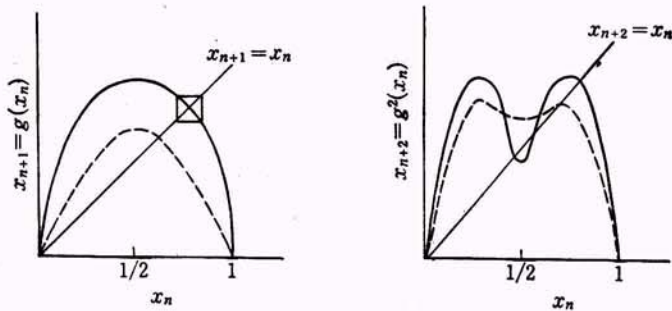


图6 $x_{n+1} = g(x_n, \lambda)$ 和 $x_{n+2} = g^2(x_n, \lambda)$ 与直线 $y = x$ 的交点分别代表固定点和 2 周期解。
虚线: $1 < \lambda < 3$; 实线: $\lambda \geq 3$

人们在流体、非线性电路的实验中定量地验证了这个重要的理论发现^[10,11]。

在点 $\lambda = \lambda_\infty$, 对任意大的 k , 2^k 周期点解均存在, 但它们都是不稳定的。在 $\lambda_\infty < \lambda \leq 4$ 的大部分区域中, (5) 式迭代出来的 $x_n (n = 1, 2, \dots)$ 在 $[0, 1]$ 上分布的结果, 看起来就好像是连续分布的随机数, 当 $\lambda = 4$ 时其几率分布可严格解得。图 7 给出 $\lambda \in (3, 4)$ 时, x 轴上对应的渐近状态。在那里, 我们可以清楚地看到 $k \leq 4$ 的分岔以及 $\lambda \geq \lambda_\infty$ 的混沌现象。

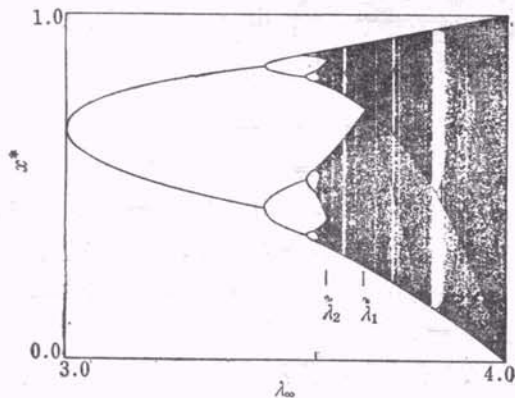
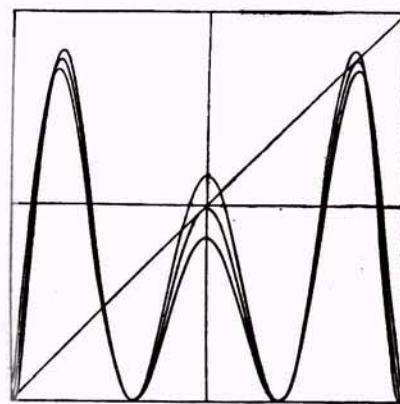


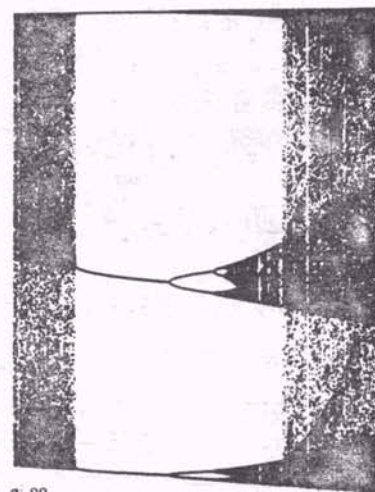
图7 系统(5)的渐近行为^[12]

由图 7 可见, $[\lambda_\infty, 4]$ 被 $\{\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2, \dots, \tilde{\lambda}_k, \dots\}$ 划分成不同的“混沌带”, 每一个混沌带对应于 x 轴上 2^k 个分裂开的小区间 (我们可看清 $k \leq 4$ 的情形)。这混沌带序列也遵从同样的方式即(7)式, 反方向地趋向于 λ_∞ 。

另外, 混沌带内还有不少透明处清楚地标出多周期解, 好象一扇扇“天窗”。最明显的是 $\lambda \geq \lambda_c = 1 + \sqrt{8}$ 时的 3 周期点解。象这样的



(a)



(b)

图 8

(a) $g^3(x, \lambda)$ 三条曲线分别对应于 $\lambda \leq \lambda_c$, $\lambda = \lambda_c$ 和 $\lambda \geq \lambda_c$, $\lambda_c = 1 + \sqrt{8}$; (b)^[12] 3 周期点解的“天窗”, 如果看 g^3 而不是 g , 我们将得到图的三分之一, 它与图 7 完全相似^[12]

不能写成 $m \cdot 2^k$ 形式的“基本周期解”产生于所谓“切分岔”[见图 8(a)]. 有趣的是, 每次切分岔后, 跟着就有类似的“倍周期分岔”, 同样遵从(7)式. 事实上, 如果我们把一“天窗”的局部放大, 所得图象与图 7 完全相似 [见图 8(b)]. 而且如果这“局部”里的某一天窗每次被放大, 我们还将得到相似的图象. 这种无穷层次的嵌套结构, 是混沌现象里的一种常见的体制.

当 $\lambda \leq \lambda_c$ 时, 系统却表现出另一种混沌行为 [见图 8(a)]: 由于直线 $x_{n+1} = x_n$ 在 g^3 的某极值点附近几乎与 g^3 相切, 一个邻近的初始点得经过很多次叠代才可以离开这个小区域. 那么, 在这个区域里系统象是在作振荡, 可一旦离去, 就象混乱的尖峰了. 迭代使系统在这两个状态间来回摆动, 造成了所谓“阵发混沌”(图 9).



图 9 Lorenz 模型(2)里的阵发混沌^[13]

比较(4)式和(5)式, 我们看到, “非线性”可以给如此简单的决定性动力系统带来多么丰富的分岔现象和混乱、随机行为.

三、混沌——奇特的几何性质和动力学性质

现在对混沌还没有一个精确统一的定义. 一般认为, 混沌这个物理状态有如下特点: (1) 含有无穷可数个、不稳定的周期轨迹, 含有不可数个非周期轨迹 (参阅上一节). (2) 对初始条件上的误差敏感, 在相空间里的几何结构有自相似的无穷嵌套层次; 作为相空间的一个子集, 往往有非整数的维数. 这里, 混沌态作为一个整体是不是对相空间的其它点有吸引力, 并没有明确要求 (若是, 则叫做“奇怪吸引子”); 也不排斥它与长周期的稳定极限环共存的可能.

从混沌的这些特点出发, 我们可以寻求建立一些判断它存在的根据. L. Shil'nikov 发

物理

现^[4], 在一定条件下, 如果当 $t \rightarrow \pm\infty$ 时有一种趋向于同一个定点态的特殊轨迹 (“同宿轨迹”) 存在, 则在它的近旁就有满足特点 (1) 的轨迹的集合. 也是以混沌的上述特点为基础, O. Rössler^[15] 从几何拓扑的角度出发, “造”出了一些混沌的典型例子 [图 10].

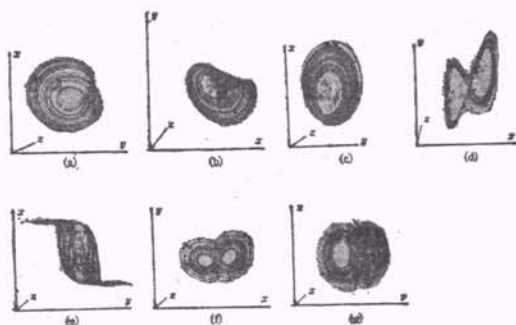


图 10

(a) 螺线型混沌; (b) 螺钉型混沌; (c) 环面型混沌; (d) 反向螺线型混沌; (e) 双螺钉型混沌; (f) 相错螺线型混沌; (g) 反双螺线型混沌 [正是 Lorenz 模型中(2)式当 $b = 8/3, \sigma = 10, r = 28$ 时的奇怪吸引子]

下面我们来看看特点(2). 奇怪吸引子的体积为零, 分布区域有限, 但上面的运动轨迹却很不稳定, 对初始条件敏感, 会沿某些方向指数分离, 这就使得其几何结构必定具有通过轨迹的无穷次折迭形成的“无穷层次的自相似”特点.

先举个一维的例子: 把线段 $[0, 1]$ 截成三等份, 拿去中间的一段 (保留其端点), 再对剩下的两段做同样的处理 (图 11). 如此无限地分下去, 最后剩下的点的集合叫 Cantor 集合. Cantor 集合的无穷层次自相似特点很明显: 比如, 任取一“局部” $[0, 3^{-n}]$ ($n = 1, 2, \dots$), 它与整个 $[0, 1]$ 的图象完全相似.

Cantor 集合的“长度”为零, 因为取走的所有段节的总长为

$$\frac{1}{3} + \frac{2}{9} + \frac{4}{27} + \dots + \frac{2^k}{3^{k+1}} + \dots = 1$$

可是, 这个集合包含的“数的个数”与线段 $[0, 1]$ 本身一样多: 属于 Cantor 集合的数可由一列 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 表示, 其中 $a_i = 0$ 或 1, 标明点

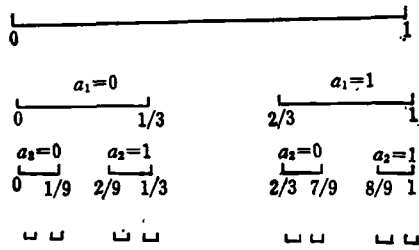


图 11 Cantor 集合, 其中每一个点可由 $\{a_1, a_2, \dots\}$ 表示
 在第 j 次分截时落在左边或右边。但是每个 $x \in [0, 1]$ 可写成二进制表达式 $x = \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2^2} + \dots, b_j = 0$ 或 1 。由此可见 Cantor 集合与整个线段 $[0, 1]$ 的对应关系。

描写具有自相似结构的几何对象的一种基本度量性质叫“Hausdorff 维数”。根据定义, 如果要测量某一集合的 Hausdorff 维数, 我们取边长为 ϵ 的正方体把这个集合填满 (图 12)。如果 $N(\epsilon)$ 是所需立方体的个数, 那么 Hausdorff 维数定义为

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\log N(\epsilon)}{\log \frac{1}{\epsilon}} = D. \quad (8)$$

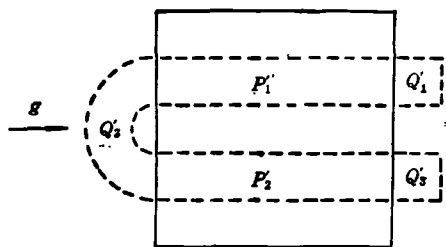
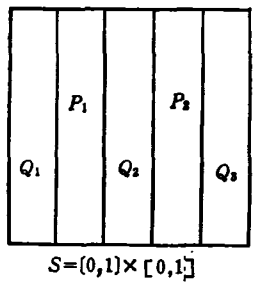


图 13 Smale 马蹄动力机制

S 为 2^n 条狭窄的带子, 而渐近状态、 $\lim_{n \rightarrow \infty} g^n(S) \cap S$ 在纵方向上就形成了一个 Cantor 似的集合。这个例子叫做 Smale 马蹄机制^[6], 它可以由映象的同宿轨迹的存在来说明。由于篇幅所限, 我们不作具体讨论了。

人们对混沌的研究还刚刚开始, 只是对在一定容器限制下的湍流的产生机制开始有了认识。至于充分发展了的流体湍流, 无论理论上

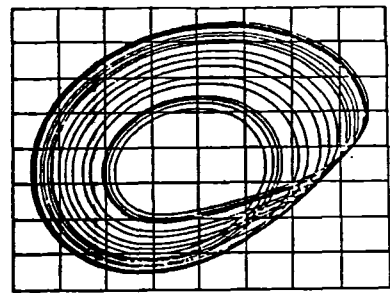


图 12 将包含一个吸引子的区域分成一些小块用来计算 Hausdorff 维数

比如一块平常的正方体, 当 ϵ 缩小一倍时, $N(\epsilon)$ 增大 2^3 倍, 因此 D 与平常的维数“3”相同。又如一个定常点的 $D = 0$, 因为 $N(\epsilon) = 1$ 。对于 Cantor 集合, 如果 $\epsilon = 1/3, N(1/3) = 2; \epsilon = 1/9, N(1/9) = 4; \dots$ 所以

$$D = \frac{\log 2}{\log 3} = 0.6309 \dots$$

Cantor 集合的这些性质在混沌这样的复杂动力学机制里有普遍的表现。例如, 考察一个二维映象 (图 13), $g(P_i) = P'_i (i = 1, 2); g(Q_j) = Q'_j (j = 1, 2, 3)$ 。不难看出, $g^n(S) \cap$

还是实验上的研究都还很不够。这时空间各种尺度上的旋涡组成“空间混沌”, 无限多个自由度是问题的焦点。另外, 还有一类与流体湍流差别很大的湍流, 即在受控核应用中常见的等离子体湍流, 由于等离子体是由带电离子组成, 其情形比流体还要复杂。

混沌本身有独立于湍流的意义。它是自然界随着时间变化的一种机制和形式, 是一种常见的现象。比如心脏的病态搏动, 就表现出混

沌特征的行为。自亚里斯多德起,几千年来人们曾认为天体的运行“周期和谐”,“完美”。可是现在众所周知,三体系统就表现出内在的复杂行为和随机性。对混沌的深入探讨,将越来越清楚地揭示,它不是“无序”,而是一种非周期的复杂的“序”,视它为“混沌”的看法将作为无知而被遗忘。

对混沌的认识,还将有助于认清“随机性”的本质。上面提到的三体问题,就是少自由度的不可积哈密顿系统具有内在随机性的一个例子。在统计力学里,怎样以微观的可逆过程为出发点去讨论宏观的不可逆过程,随机性在“时间箭头”的产生中的作用及其来源是什么,这些问题自玻耳兹曼以来始终被作为基本的问题讨论不休,但仍没有得到清楚的答案。混沌给出了一个例子,说明随机性如何能够通过确定论的动力学机制产生出来,以及它与动力系统的复杂性(如许多周期轨迹的聚集)和不稳定性(对初始条件的误差作指数放大)的内在相关性。

对混沌现象的较详细介绍见文献[17]。作者感谢郝柏林教授的帮助。

(上接第214页)

提供研究这些情况下磁结构同深度的关联。在炼钢工业中,CEMS 还能研究奥氏体合金相,通过烧结和氮化或冷加工使表面硬化,也可分析镀层的界面。由于离子注入对材料的表面特性改变很大^[10],如耐磨损^[11]和抗腐蚀等,而且注入深度同 CEMS 探测深度相当,因此用内转换电子穆斯堡尔谱来研究注入离子对金属的作用是很有意义的^[12]。

参 考 文 献

- [1] U. Gonser (ed.), *Mössbauer Spectroscopy*, Springer, (1975).
 [2] G. K. Shenoy, *Nuclear and Electron Resonance Spectroscopies Applied to Material Science*, eds. E. N. Kaufman, G. K. Shenoy, North Holland,

参 考 文 献

- [1] P. Bergé et Y. Pomeau, *Recherche April*, (1980), 422.
 [2] D. Ruelle and F. Takens, *Comm. Math. Phys.*, **20**(1971), 167.
 [3] H. L. Swinney and J. P. Gollub, *Phys. Today*, **31-8**(1978), 41.
 [4] I. Prigogine, *Science*, **201**(1978), 777.
 [5] G. Nicolis and I. Prigogine, *Self-Organisations in Nonequilibrium Systems*, Wiley-interscience (1977).
 [6] R. M. Noyes and R. J. Field, *Ann. Rev. Phys. Chem.*, **25**(1974), 95.
 [7] J. L. Hudson et al., *J. Chem. Phys.*, **71**(1979), 1601.
 [8] E. N. Lorenz, *J. Atm. Sci.*, **20**(1963), 130.
 [9] M. J. Feigenbaum, *J. Stat. Phys.*, **19**(1978), 25.
 [10] A. Libchaber and J. Maurer, *J. Phys. Coll.*, **C 41**(1980), C3—51.
 [11] P. S. Linsay, *Phys. Rev. Lett.*, **47**(1981), 1349.
 [12] T. Geisel and J. Nierwetberg, in “*Dynamical Systems and Chaos*”, L. Garrido ed., Springer, (1982).
 [13] Y. Pomeau and P. Manneville, *Comm. Math. Phys.*, **74**(1980), 189.
 [14] L. P. Shil'nikoy, *Sov. Math. Dokl.*, **6**(1965), 163.
 [15] O. E. Rössler, in “*Synergetics*”, Vol. 2, H. Haken ed., Springer, (1977).
 [16] S. Smale, *Bull. Amer. Math. Soc.*, **73**(1967), 747.
 [17] 郝柏林, *物理学进展*, **3** (1983), 329.

New York, (1981), 133.

- [3] C. Tzara and R. Barloulaud, *Phys. Rev. Lett.*, **4**(1960), 455.
 [4] P. J. Black and P. B. Moon, *Nature*, **188**(1960), 481.
 [5] S. Bernstein and E. C. Campbell, *Phys. Rev.*, **132** (1963), 1625.
 [6] J. Olsen, *Nucl. Instr. and Meth.*, **70**(1969), 109.
 [7] K. R. Swanson and J. J. Spijkerman, *J. Appl. Phys.*, **41**(1970), 3155.
 [8] Y. Isozumi et al., *Nucl. Instr. Meth.*, **120**(1974), 23.
 [9] U. Bäverstam et al., *Nucl. Instr. Meth.*, **115**(1974), 373.
 [10] 北京师范大学低能核物理研究所、北京市辐射中心, *离子注入原理和技术*, 北京出版社, (1982).
 [11] N. E. W. Hartley, *Thin Solid Films*, **64**(1979), 177.
 [12] 王广厚, *核技术*, **4**(1984), 10.